

ОБ ОБЩЕМ КОРНЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЛОБАЛЬНОГО НАДМОНОИДА*С.Ю. Корабельщикова*, Б.Ф. Мельников***

*Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

**Тольяттинский филиал Самарского национального исследовательского университета
имени академика С.П. Королёва

Приведен и доказан ряд свойств глобальных надмоноидов свободных моноидов, которые, в свою очередь, также являются моноидами. В частности, доказаны условия наличия левого и правого делителей в рассматриваемых глобальных надмоноидах, из которых следует несвободность последних. На основании этих свойств доказано необходимое условие выполнения равенства $A^m = B^n$ для глобальных надмоноидов свободных моноидов, которое состоит в наличии у глобальных надмоноидов A и B общего корня (в общем случае различной степени). Результаты получены при условии, что по крайней мере один из языков обладает свойством префикса. Также рассмотрена задача нахождения корня n -й степени из заданного языка. Она решается для языка специального вида, состоящего из всех слов длиной от t_1 до t_2 ($t_1 \leq t_2$) над алфавитом Σ . Очевидно, что критерий существования корня n -й степени – делимость t_1 и t_2 на n . В работе приведено необходимое и достаточное условие того, что язык специального вида является корнем n -й степени из заданного языка такого же вида, введены понятия тривиального и первообразного корня, представлен пример, поясняющий данные определения. Все приведенные в статье примеры актуальны для прикладных вопросов рассматриваемой теории, в частности для построения специальных вариантов автоматизированного преобразования регулярных грамматических структур и контекстно-свободных грамматик в системах автоматизации построения компиляторов. В терминах введенных нами понятий формулируется необходимое условие того, что язык произвольного вида в алфавите Σ является корнем n -й степени из заданного языка специального вида. Вопрос о том, достаточно ли полученное авторами условие, пока остается открытым.

Ключевые слова: свободный моноид, глобальный надмоноид, префиксный язык, корень из элементов надмоноида.

В данной работе для элементов глобальных надмоноидов свободных моноидов [1, 2] нами рассматривается проблема равенства $A^m = B^n$.

Очевидна связь этой проблемы с некоторыми вопросами теории формальных языков, в частности с итерациями языков, исследуемыми

Контактное лицо: Корабельщикова Светлана Юрьевна, адрес: 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; e-mail: kmv@atnet.ru

Для цитирования: Корабельщикова С.Ю., Мельников Б.Ф. Об общем корне элементов глобального надмоноида // Вестн. Сев. (Арктич.) федер. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2016. № 3. С. 91–96. doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.3.91

авторами настоящей статьи в [1–4]. Действительно, A и B можно рассматривать как произвольные языки над одним и тем же, не обязательно конечным, алфавитом Σ . При этом будем считать, что по крайней мере один из языков, для определенности A , обладает свойством префикса. (По определению [5], язык A обладает свойством префикса тогда и только тогда, когда ни одно слово из A не является собственным префиксом никакого другого слова из того же A . Этот факт будем обозначать $Pr(A)$.) Символом e обозначим единицу исходного свободного моноида, т. е. пустое слово над алфавитом Σ . Множество всех слов над алфавитом Σ , включая e , будем обозначать Σ^* . Множество всех языков над некоторым алфавитом Σ с операцией конкатенации $\circ$ образует свободный моноид с единицей $\{e\}$, являющийся для исходного свободного моноида $(\Sigma^*, \circ, e)$ глобальным надмоноидом. Стоит подчеркнуть, что элементами глобального надмоноида являются не слова, а множества слов, т. е. языки. Длину самого короткого слова в языке A обозначим символом $L_{\min}(A)$. Некоторые другие используемые в тексте статьи обозначения и термины можно найти в [5, 6].

Приложения теории полугрупп и, в частности, моноидов также рассматриваются в монографии [5], где содержится и достаточно полная (для середины 1980-х годов) библиография по соответствующей проблематике. Прикладным вопросам – от автоматов и формальных языков до некоторых биологических и социологических моделей – посвящены две главы монографии [7]. С рассматриваемой нами задачей тесно связана задача «извлечения корня» из языка: для заданного языка $A \subseteq \Sigma^*$ требуется найти максимально возможное $n \in \mathbb{N}$ и зависящий от n язык B , такие, что $A = B^n$. До конца эта задача авторами еще не исследована, однако в частном случае получен ряд исчерпывающих результатов, опубликованных в [4, 8, 9]. Некоторые прикладные вопросы полученных результатов связаны с публикациями одного из авторов настоящей статьи [10, 11]. В частности, приведенные в статье примеры актуаль-

ны для прикладных вопросов рассматриваемой теории, а именно – для построения специальных вариантов автоматизированного преобразования регулярных грамматических структур и контекстно-свободных грамматик в системах автоматизации построения компиляторов.

Некоторые простые свойства глобальных надмоноидов

Приведем сначала некоторые простые свойства глобальных надмоноидов.

1. Если $Pr(A)$ и $AB = AC$, то $B = C$.
2. Если $Pr(A)$ и $Pr(B)$, то $Pr(AB)$.
3. Если $Pr(AB)$, то $Pr(B)$.

Утверждение 1. Если $Pr(A)$, $Pr(B)$ и $AX = BY$ для каких-либо X и Y , то $(\exists C)(A = BC \text{ или } B = AC)$.

Доказательство. Если $A = B$, то сформулированное утверждение выполняется для $C = \{e\}$. Поэтому будем полагать далее, что $A \neq B$.

Предположим, что

$$u \in A \text{ и } uv \in B \quad (1)$$

для некоторых слов u и $v \neq e$ (случай $u \in B$, $uv \in A$ рассматривается аналогично).

Тогда согласно $Pr(A)$ и $AX = BY$ выполнено условие $vY \subseteq X$.

Поэтому для произвольного $u' \in A$ имеем $(\forall y \in Y)(u'vy \in AX = BY)$, и, вследствие условия $Pr(B)$, получаем $u'v \in B$. Таким образом, для рассматриваемого v выполняется утверждение $(\forall u' \in A)(u'v \in B)$.

Следовательно, для множества C , состоящего из всех слов v , которые могут быть выбраны согласно (1), выполнено равенство $AC = B$. Утверждение доказано.

Теорема 1 (об общем корне). Пусть $Pr(A)$ и для некоторых $m, n \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство $A^m = B^n$. (2)

Тогда $(\exists C, m', n')(A = C^{m'} \text{ и } B = C^{n'})$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $m \leq n$. Согласно свойству 2, из $Pr(A)$ следует $Pr(A^m)$, а значит, $Pr(B^n)$ и по свойству 3 верно $Pr(B)$.

Тогда по утверждению 1 $A = BQ$ для некоторого языка Q (допускаем возможность $Q = \{e\}$). Выберем максимальное число p_1 , для которого $(\exists Q)(A = B^{p_1}Q)$.

Обозначим $A_1 = Q$, тогда можем записать равенство (2) следующим образом:

$$(B^{p_1} A_1)^m = B^n. \quad (3)$$

Из формулы (3) получаем:

$$A_1 (B^{p_1} A_1)^{m-1} = B^{n-p_1}. \quad (4)$$

При этом очевидно, что $n \geq p_1$.

Согласно равенству (4) и утверждению 1, имеем $B = A_1 Q$ для некоторого языка Q (т. к. равенство $A = B^{p_1} Q$ для произвольного $Q \neq \{e\}$ невозможно из-за способа выбора p_1). Выберем аналогично число q_1 и введем множество B_1 согласно равенству $B = A_1^{q_1} B_1$ (число q_1 также максимально возможное). На основе введенных обозначений мы можем записать (2) таким образом:

$$((A_1^{q_1} B_1)^{p_1} A_1)^m = (A_1^{q_1} B_1)^n. \quad (5)$$

Продолжая этот процесс, устанавливаем конечные последовательности пар множеств A_i и B_i . При этом числа p_i , q_i и языки A_i и B_i определяются из условий $A_{i-1} = B_{i-1}^{p_i} A_i$ и $B_{i-1} = A_{i-1}^{q_i} B_i$.

Таким образом, после преобразований можем переписать исходное равенство (2) следующими способами:

$$\begin{aligned} & ((\dots((B_{i-1})^{p_{i-1}} A_i)^{q_{i-1}} B_{i-1})^{p_{i-2}} \dots B_{i-1})^{p_1} A_1)^m = \\ & = (\dots((B_{i-1})^{p_{i-1}} A_i)^{q_{i-1}} B_{i-1})^{p_{i-2}} \dots B_{i-1})^n \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} & ((\dots(((A_i)^{q_{i-1}} B_i)^{p_{i-1}} A_i)^{q_{i-2}} \dots B_i)^{p_1} A_1)^m = \\ & = (\dots(((A_i)^{q_{i-1}} B_i)^{p_{i-1}} A_i)^{q_{i-2}} \dots B_i)^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что равенства (6) и (7) выполняются и на первом шаге (т. е. для множеств A_1 и B_1), если считать $A_0 = A$ и $B_0 = mB$. Эти равенства на первом шаге – условия (3) и (5). Возможность выбора p_{i-1} и A_i для каждого следующего i – следствие (7), а возможность выбора q_i и B_i – следствие (6).

Описанный процесс конечен, т. к. для произвольного рассматриваемого i выполнены условия:

$$L_{\min}(A_i) < L_{\min}(A_{i-1}) \text{ и } L_{\min}(B_i) < L_{\min}(B_{i-1}).$$

Поэтому для некоторого $r \in N$ либо $p_r = 0$, либо $q_r = 0$. Пусть $p_r = 0$ (случай $q_r = 0$ рассматривается аналогично). Тогда $A_r = B_r$ (поскольку неравенство $A_r \neq B_r$ противоречит тому, что число q_{r-1} в (7) – максимально возможное). Обозначив $C = A_r = B_r$, легко докажем равенства $A = C^{m'}$ и $B = C^{n'}$ для некоторых $m', n' \in N$ индукцией по i для $i = r, r-1, \dots, 1, 0$, используя при этом (6) и (7). Теорема доказана.

Замечание 1. Если в доказанной выше теореме обозначить через k наибольший общий делитель чисел m и n , то очевидно, что $m' = m/k$ и $n' = n/k$. В целом можно провести аналогию между утверждением теоремы 1, с одной стороны, и, с другой стороны, легко доказываемым фактом из области арифметики, тоже формулирующимся с помощью (2), где, в отличие от доказанной теоремы, A , B и C – некоторые натуральные числа, причем C является общим корнем из чисел A и B (корнем разных степеней).

О задаче извлечения корня из заданного языка

Как уже было отмечено, с задачей нахождения общего корня непосредственно связана задача извлечения корня из заданного языка.

Пусть Σ – произвольный алфавит, тогда Σ^i – формальный язык, состоящий из всевозможных слов длиной i ($i \in N$) над алфавитом Σ . Как указано в [12], операция извлечения корня не является однозначной функцией: из языка

$\bigcup_{2 \leq i \leq 10} \Sigma^i$ извлекается не только очевидный квадратный корень $\bigcup_{1 \leq i \leq 5} \Sigma^i$, но и $\bigcup_{i=\{1,2,4,5\}} \Sigma^i$.

Теорема 2. Пусть M – подмножество множества натуральных чисел $\{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$.

Язык $\bigcup_{i \in M} \Sigma^i$ является корнем n -й степени из

языка $\bigcup_{n_1 \leq i \leq n_2} \Sigma^i$ тогда и только тогда, когда вы-

полняется условие

$$(\forall i) (nn_1 \leq i \leq nn_2 \rightarrow i = a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (8)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые элементы из M (не обязательно различные).

Доказательство. Условие (8) означает, что любую длину слова из исходного языка мы можем составить из n слагаемых, которые соответствуют длинам слов, содержащихся в корне. Таким образом, если язык $\bigcup_{i \in M} \Sigma^i$ является корнем n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$, то условие (8) выполняется. Верно и обратное. Если выполняется условие (8), то любое слово длиной i из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$ можно получить конкатенацией n слов длиной $a_1, a_2, \dots, a_n$ из языка $\bigcup_{i \in M} \Sigma^i$. Отсюда следует, что $\left(\bigcup_{i \in M} \Sigma^i\right)^n$ содержит все слова длиной от nn_1 до nn_2 , т. е. является корнем n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что между корнями n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$ и корнями n -й степени из языка $\bigcup_{n \leq i \leq nn_2 - nn_1 + n} \Sigma^i$ имеется взаимно однозначное соответствие. Множеству индексов M корня из языка $\bigcup_{n \leq i \leq nn_2 - nn_1 + n} \Sigma^i$ соответствует множество индексов $L = M + (n_1 - 1)$ корня из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$.

Пусть S – семейство всех множеств индексов $M \subseteq \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$, задающих корни n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$.

Определение 1. Корень $\bigcup_{i \in M} \Sigma^i$ называется

первообразным, если M – минимальное по включению множество из S , и тривиальным, если $M = \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$.

Определение 2. Мощность множества индексов называется весом корня.

Пример. Из языка $\bigcup_{2 \leq i \leq 14} \Sigma^i$ извлекаются 5 квадратных корней с множествами индексов $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ и $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Из них 2 последних множества индексов – минимальные, им соответствуют 2 первообразных корня весом 5 и 6 соответственно, а первое множество индексов задает тривиальный корень.

Теорема 3. Если для некоторого языка B , некоторого первообразного корня A n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$ и тривиального корня C n -й степени из этого же языка выполняются включения

$$A \subseteq B \subseteq C, \quad (9)$$

то B тоже является корнем n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$.

Доказательство. Возведя включения (9) в степень n , получим

$$\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i \subseteq B^n \subseteq \bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i,$$

откуда $B^n = \bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$.

Последнее равенство означает, что язык B – корень n -й степени из языка $\bigcup_{nn_1 \leq i \leq nn_2} \Sigma^i$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Melnikov B. Some Equivalence Problems for Free Monoids and for Subclasses of the CF-Grammars Class. 1995. P. 67–68.
2. Мельников Б.Ф. Описание специальных подмоноидов глобального надмоноида свободного моноида // Изв. вузов. Математика. 2004. № 3(502). С. 46–56.
3. Melnikov B. The Equality Condition for Infinite Catenations of Two Sets of Finite Words // Int. J. of Found. of Comp. Sci. 1993. Vol. 4, № 3. P. 267–274.
4. Корабельщикова С.Ю., Мельников Б.Ф. Итерации языков и максимальные префиксные коды // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2015. № 2. С. 106–120.
5. Саломая А. Жемчужины теории формальных языков. М., 1986. 159 с.
6. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М., 1985. 440 с.
7. Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра. Екатеринбург, 1997. 764 с.
8. Корабельщикова С.Ю., Чесноков А.И., Тутыгин А.Г. О первообразных корнях из языков специального вида // Дискретные модели в теории управляющих систем: тр. IX Междунар. конф. (Москва и Подмоскowie, 20–22 мая 2015 г.). М., 2015. С. 116–118.
9. Корабельщикова С.Ю., Чесноков А.И. Лунная арифметика в приложении к задаче извлечения корней из языков специального вида // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта «Инфос-2015»: 8-я междунар. науч.-техн. конф. (26–27 июня 2015 г.). Вологда, 2015. С. 73–77.
10. Melnikov B.F., Melnikova A.A. Some Properties of the Basis Finite Automaton // Korean Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 9, № 1. P. 135–150.
11. Мельников Б.Ф., Пивнева С.В., Рогова О.А. Репрезентативность случайно сгенерированных недетерминированных конечных автоматов с точки зрения соответствующих базисных автоматов // Стохаст. оптимизация в информатике. 2010. Т. 6, № 1-1. С. 74–82.
12. Корабельщикова С.Ю., Мельников Б.Ф. Максимальные префиксные коды и проблема равенства в разных классах языков // Проблемы теоретической кибернетики: материалы XVII Междунар. конф. (Казань, 16–20 июня 2014 г.). Казань, 2014. С. 143–146.

References

1. Melnikov B. Some Equivalence Problems for Free Monoids and for Subclasses of the CF-Grammars Class. *Number Theoretic and Algebraic Methods in Computer Science*, 1995, pp. 67–68.
2. Mel'nikov B.F. Opisanie spetsial'nykh podmonoidov global'nogo nadmonoida svobodnogo monoida [Description of Special Submonoids of Global Supermonoid of Free Monoid]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2004, no. 3(502), pp. 46–56.
3. Melnikov B. The Equality Condition for Infinite Catenations of Two Sets of Finite Words. *Int. J. of Found. of Comp. Sci.*, 1993, vol. 4, no. 3, pp. 267–274.
4. Korabel'shchikova S.Yu., Mel'nikov B.F. Iteratsii yazykov i maksimal'nye prefiksnye kody [Languages Iterations and Maximal Prefix Codes]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2015, no. 2, pp. 106–120.
5. Salomaa A. *Zhemchuzhiny teorii formal'nykh yazykov* [Pearls of Formal Language Theory]. Moscow, 1986. 159 p.
6. Lalleman Zh. *Polugruppy i kombinatornye prilozheniya* [Semigroups and Combinatorial Applications]. Moscow, 1985. 440 p.
7. Lidl R., Pil'ts G. *Prikladnaya abstraktnaya algebra* [Applied Abstract Algebra]. Yekaterinburg, 1997. 764 p.
8. Korabel'shchikova S.Yu., Chesnokov A.I., Tutygin A.G. O pervoobraznykh kornyakh iz yazykov spetsial'nogo vida [On the Primitive Roots of Special Form Languages]. *Diskretnye modeli v teorii upravlyayushchikh sistem: tr. IX Mezhdunar. konf. (Moskva i Podmoskov'e, 20–22 maya 2015 g.)* [Discrete Models in the Theory of Control Systems: Proc. 9th Intern. Conf. (Moscow and Moscow Region, May 20–22, 2015)]. Moscow, 2015, pp. 116–118.
9. Korabel'shchikova S.Yu., Chesnokov A.I. Lunnaya arifmetika v prilozhenii k zadache izvlecheniya korney iz yazykov spetsial'nogo vida [Moon Arithmetic in Application to the Rooting from the Special Form Languages]. *Informatizatsiya protsessov formirovaniya otkrytykh sistem na osnove SAPR, ASNI i sistem iskusstvennogo intellekta "Infos-2015": 8-ya mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. (26–27 iyunya 2015 g.)* [Informatization of Formation Processes of Open Systems Based on CAD, ARS and Artificial Intelligence Systems "INFOS- 2015": 8th Int. Sci. Eng. Conf. (26–27 June, 2015)]. Vologda, 2015, pp. 73–77.

10. Melnikov B.F., Melnikova A.A. Some Properties of the Basis Finite Automaton. *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002, vol. 9, no. 1, pp. 135–150.

11. Mel'nikov B.F., Pivneva S.V., Rogova O.A. Reprezentativnost' sluchayno sgenerirovannykh nedeterminirovannykh konechnykh avtomatov s tochki zreniya sootvetstvuyushchikh bazisnykh avtomatov [The Representativeness of Stochastic Generated Nondeterministic Finite State Machines in Terms of the Relevant Basic Automata]. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike*, 2010, vol. 6, no. 1-1, pp. 74–82.

12. Korabel'shchikova S.Yu., Mel'nikov B.F. Maksimal'nye prefiksnye kody i problema ravenstva v raznykh klassakh yazykov [The Maximum Prefix Codes, and the Problem of Equality in Different Classes of Languages]. *Problemy teoreticheskoy kibernetiki: materialy XVII Mezhdunar. konf. (Kazan', 16–20 iyunya 2014 g.)* [Problems of Theoretical Cybernetics: Proc. 17th Int. Conf. (Kazan, 16–20 June, 2014)]. Kazan, 2014, pp. 143–146.

doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.3.91

Svetlana Korabel'shchikova*, Boris Mel'nikov**

*Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russian Federation)

**Togliatti Branch of Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev (Togliatti, Russian Federation)

ON A COMMON ROOT OF THE ELEMENTS OF GLOBAL SUPERMONOID

The paper presents and proves some properties of global supermonoids of free monoids, which, in turn, are also monoids. We prove the conditions of the existence of the left and right divisors in these global supermonoids, which are non-free. On the basis of these properties the paper proves a necessary condition for the equality $A^n = B^n$ for global supermonoids of free monoids, which is available from global supermonoids A and B of the common root (in general in varying degrees). The results are obtained with the proviso that at least one of the languages has a prefix property. The problem of finding the root of the n th degree of the specified language is also considered. It is solved for a special form language consisting of all words in length from t_1 to t_2 ($t_1 \leq t_2$) over the alphabet. The criterion for the root existence of the n th degree is a divisibility of t_1 and t_2 by n . The paper demonstrates the necessary and sufficient condition that the special form language is the root of the n th degree of the selected language of the same form; the concepts of trivial and primitive roots and an example explaining these definitions are given. All the examples given in the article are relevant to the applied problems of the theory, in particular – for the constructing of special versions of the automated conversion of regular grammatical structures and context-free grammars in the compiler construction automation systems. In terms of the introduced concepts we formulate a necessary condition that the language of any kind in the alphabet is the root of the n th degree of a given special form language. The issue of the conditional sufficiency remains open.

Keywords: free monoid, global supermonoid, prefix language, root of the elements of supermonoid.

Received on March 21, 2016

Поступила 21.03.2016

Corresponding author: Svetlana Korabel'shchikova, address: Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation; e-mail: kmv@atnet.ru

For citation: Korabel'shchikova S.Yu., Mel'nikov B.F. On a Common Root of the Elements of Global Supermonoid. *Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federal'nogo universiteta. Ser.: Estestvennye nauki*, 2016, no. 3, pp. 91–96. doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.3.91