УДК 517.927

doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.2.115

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Т.А. Сафонова, С.В. Рябченко**

*Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Вопросы об асимптотике собственных значений и собственных функций в зависимости от коэффициентов дифференциального выражения, а также о получении формул регуляризованного следа для соответствующих операторов являются весьма актуальными в современной спектральной теории дифференциальных операторов. В случае оператора Штурма–Лиувилля с непрерывно-дифференцируемым потенциалом основные результаты были получены И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в работе 1953 года. Позднее в работах Л.А. Дикого, В.А. Садовничего, В.Б. Лидского, В.А. Марченко и других математиков эти результаты были обобщены на случай дифференциальных операторов высших порядков и операторов в частных производных. Для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, не являющимся локально интегрируемой функцией, и краевых условий Дирихле на конечном интервале аналогичные вопросы впервые были рассмотрены А.А. Шкаликовым и А.М. Савчуком в работах 1999–2003 годов. В сравнительно недавних работах А.Г. Костюченко и С.Р. Исмагилова (2007–2008 годы) был получен главный член асимптотики считающей функции для самосопряженных расширений векторного оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением $l[y]=-y''(x)+Q(x)y(x)$ в пространстве $L_2^2(R_+)$, где $Q(x)$ – вещественная симметрическая квадратная матрица второго порядка. Данная работа посвящена нахождению трансцендентных уравнений для собственных значений самосопряженного оператора, порожденного выражением $l[y](x)=-y''(x)+\sum_{k=1}^{n-1}h_k\delta(x-x_k)y(x)$, где $x_k=\dfrac{k}{n}$, $h_k\in R$ ($k=1,2,\ldots,n-1$), а $\delta(x)$ – δ-функция Дирака, и разделенными краевыми условиями вида $y(0)=y(1)=0$, $y(0)=y^{[1]}(1)=0$, $y^{[1]}(0)=y^{[1]}(1)=0$ в пространстве $L^2[0,1]$. Дальнейший анализ полученных уравнений позволяет найти асимптотику собственных значений и формулу регуляризованного следа первого порядка рассмотренных операторов.

Ключевые слова: *квазипроизводная, оператор Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, собственные значения.*

---

[1]Авторы выражают глубокую благодарность профессору К.А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант Президента РФ № МК-3941.2015.1) и Правительства Архангельской области (конкурс «Молодые ученые Поморья», проект № 10-2015-03а «Качественный анализ дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами и смежные вопросы спектральной теории операторов»). Кроме того, исследование Т.А. Сафоновой поддержано РФФИ (гранты № 14-01-00349, № 14-01-31136-мол а, 15-31-50259) и РОФСОН.

Контактное лицо: Сафонова Татьяна Анатольевна, *адрес:* 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *e-mail:* t.Safonova@narfu.ru

1. Пусть вещественнозначная функция $\sigma(x)$ определена и измерима на отрезке $[0, 1]$ и $\sigma^2(x) \in L^1[0, 1]$. Определим квазипроизводные $y^{[0]}$, $y^{[1]}$ и $y^{[2]}$ заданной абсолютно непрерывной на $[0, 1]$ функции y, полагая

$$y^{[0]} := y\,,\ y^{[1]} := y' - \sigma y\,,\ y^{[2]} := (y^{[1]})' + \sigma y^{[1]} + \sigma^2 y\,,$$

и квазидифференциальное выражение, полагая

$$l[y](x) := -y^{[2]}(x)\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

При определении $y^{[2]}$ мы предполагаем, что $y^{[1]} \in AC[0, 1]$.

Таким образом,

$$l[y](x) = -(y^{[1]}(x))' - \sigma(x) y^{[1]}(x) - \sigma^2(x) y(x)\,,\ x \in [0, 1]\,, \tag{1}$$

а множество функций $D(l) = \left\{\ y \ \middle|\ y, y^{[1]} \in AC[0, 1]\right\}$, очевидно, является областью определения этого выражения. Из условия $\sigma^2(x) \in L^1[0, 1]$ следует, что для любой функции $y \in D(l)$ выражение $l[y]$ существует почти всюду на $[0, 1]$ и $l[y] \in L^1[0, 1]$. Кроме того, для любых двух функций f, $g \in D(l)$ справедлива формула Грина:

$$\int_\alpha^\beta \left\{\overline{g} l[f] - f\overline{l[g]}\right\} = [fg](\beta) - [fg](\alpha), \qquad 0 < \alpha \le \beta < 1, \tag{2}$$

где полулинейная форма $[fg]$ определяется равенством

$$[fg](x) := f(x)\overline{g^{[1]}(x)} - f^{[1]}(x)\overline{g(x)}, \qquad x \in [0, 1]\,,$$

и является антисимметрической, т. е. $\overline{[fg]}(x) = -[gf](x)$.

Пусть далее $L^2[0, 1]$ – пространство всех комплекснозначных измеримых функций y, интегрируемых по Лебегу с квадратом модуля на $[0, 1]$. В литературе, посвященной спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, хорошо известна процедура, с помощью которой определяются максимальный (L_1) и минимальный (L_0) операторы, порожденные выражением $l[y]$ в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$. А именно, выражение $l[y]$ порождает в пространстве $L^2[0, 1]$ максимальный оператор L_1 с областью определения $D(L_1) = \left\{y \in L^2[0, 1] \middle| y \in D(l),\ l[y] \in L^2[0, 1]\right\}$ по формуле $L_1 y = l[y]$ при $y \in D(L_1)$. Символом $D_0(l)$ обозначим множество всех финитных функций из $D(L_1)$, а символом $D(L_0)$ – множество вида $D(L_0) = \left\{y \in D(L_1) \middle| \forall g \in D(L_1),\ [yg](0) = [yg](1)\right\}$. Очевидно, что $D(L_1) \cap D_0(l) \subset D(L_0)$. Кроме того, известно, что $D(L_1) \cap D_0(l)$ образует всюду плотное множество в пространстве $L^2[0, 1]$ (см. [1], Appendix A, Th. 1). Из сказанного следует, что соотношение $L_0 y = l[y]$ при $y \in D(L_0)$ порождает замкнутый симметрический оператор L_0 с плотной областью определения $D(L_0)$. Это и есть минимальный оператор. Благодаря этому, далее выражение $l[y]$ будем называть симметрическим (формально-самосопряженным) квазидифференциальным выражением, порожденным посредством матрицы σ.

Если $'$ трактовать как операцию взятия производной в смысле теории распределений, то, как показано в [2] и [3], в выражении $y^{[2]}$ можно раскрыть все скобки и для него получить формулу $y^{[2]} = y'' - \sigma' y$. Таким образом, выражение (1) в терминах обобщенных функций формально записывается в виде

$$l[y](x) = -y''(x) + \sigma'(x) y(x)\,, \tag{3}$$

а оператор L_0, определенный ранее, можно трактовать как оператор, порожденный этим выражением в гильбертовом пространстве $L^2[0,\,1]$.

Далее разобьем отрезок $[0,\,1]$ на n равных частей точками $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ и предположим, что функция $\sigma(x)$ является ступенчатой функцией со скачками в точках x_k и величинами скачков h_k, т. е. $\sigma(x) := \alpha_k (\in R)$ при $x \in \left[\frac{k-1}{n},\, \frac{k}{n}\right]$ ($k = 1,\, 2,\, ...,\, n$) и $h_k := \alpha_{k+1} - \alpha_k$ ($k = 1,\, 2,\, ...,\, n-1$). Тогда дифференциальное выражение (3) принимает вид

$$l[y](x) = -y''(x) + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \delta(x - x_k) y(x)\,, \qquad x \in [0,\, 1]\,, \tag{4}$$

где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака.

Данная работа посвящена нахождению трансцендентных уравнений для собственных значений самосопряженного оператора, порожденного выражением (4) и разделенными краевыми условиями вида:

i) $y(0) = y(1) = 0$ (краевые условия Дирихле); ii) $y(0) = y^{[1]}(1) = 0$; iii) $y^{[1]}(0) = y^{[1]}(1) = 0$,

которые используются при нахождении асимптотики собственных значений и формулы регуляризованного следа указанного оператора.

Отметим, что в работах [2] и [3] впервые были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями σ' и краевыми условиями Дирихле на $[a,\, b]$. В работе [4] найдена формула регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением $-y''(x) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) y(x)$ и краевыми условиями Дирихле в $L^2[0,\, \pi]$. В работе [5] найдена формула регуляризованного следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, не являющимися локально интегрируемыми функциями, и краевыми условиями Дирихле в $L^2[0,\, \pi]$.

2. Рассмотрим уравнение на собственные значения

$$-y''(x) + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \delta(x - x_k) y(x) = \lambda y\,, \tag{5}$$

где $\lambda = z^2$ – спектральный параметр. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Собственные значения задачи Дирихле* $\begin{cases} l[y] = \lambda y, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ *определяются из трансцендентного уравнения*

$$(1-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & ... & a^{n-2} & a^{n-1} \\ -1 & 1+b_1 & ab_1 & a^2 b_1 & ... & a^{n-3} b_1 & a^{n-2} b_1 \\ 0 & -1 & 1+b_2 & ab_2 & ... & a^{n-4} b_2 & a^{n-3} b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1+b_3 & ... & a^{n-5} b_3 & a^{n-4} b_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1+b_{n-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

где $a = e^{-\frac{2zi}{n}}$ и $b_k = -\frac{ih_k}{2z}(1-a)$ ($k = 1,\, 2,\, ...,\, n-1$).

Доказательство. Уравнение (5) при $x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n} \right\}$ имеет вид $y''(x) = -z^2 y$. Поэтому соответствующее ему характеристическое уравнение $k^2 = -z^2$ имеет различные комплексные корни $k_1 = iz$ и $k_2 = -iz$, а общее решение уравнения (5) запишется в виде

$$y(x) = \begin{cases} c_{11}e^{izx} + c_{12}e^{-izx}, & 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ c_{21}e^{izx} + c_{22}e^{-izx}, & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n}, \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ c_{n1}e^{izx} + c_{n2}e^{-izx}, & \frac{n-1}{n} \le x \le 1. \end{cases} \tag{7}$$

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (5) следует, что $y,\ y^{[1]} \in AC[0, 1]$. Поэтому для произвольного решения уравнения (5) справедливы равенства

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{n} + 0\right) = y\left(\frac{1}{n} - 0\right), \\ y\left(\frac{2}{n} + 0\right) = y\left(\frac{2}{n} - 0\right), \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y\left(\frac{n-1}{n} + 0\right) = y\left(\frac{n-1}{n} - 0\right) \end{cases} \tag{8}$$

и

$$\begin{cases} y^{[1]}\left(\frac{1}{n} + 0\right) = y^{[1]}\left(\frac{1}{n} - 0\right), \\ y^{[1]}\left(\frac{2}{n} + 0\right) = y^{[1]}\left(\frac{2}{n} - 0\right), \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ y^{[1]}\left(\frac{n-1}{n} + 0\right) = y^{[1]}\left(\frac{n-1}{n} - 0\right). \end{cases} \tag{9}$$

Несложно получить, что система (8) с учетом (7) примет вид

$$\begin{cases} c_{11}e^{\frac{iz}{n}}+c_{12}e^{-\frac{iz}{n}}=c_{21}e^{\frac{iz}{n}}+c_{22}e^{-\frac{iz}{n}}, \\ c_{21}e^{\frac{2iz}{n}}+c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}}=c_{31}e^{\frac{2iz}{n}}+c_{32}e^{-\frac{2iz}{n}}, \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ c_{n-1,1}e^{\frac{(n-1)iz}{n}}+c_{n-1,2}e^{-\frac{(n-1)iz}{n}}=c_{n1}e^{\frac{(n-1)iz}{n}}+c_{n2}e^{-\frac{(n-1)iz}{n}} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_{11}-c_{21}=(c_{22}-c_{12})e^{-\frac{2iz}{n}}, \\ c_{21}-c_{31}=(c_{32}-c_{22})e^{-\frac{4iz}{n}}, \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ c_{n-1,1}-c_{n1}=(c_{n2}-c_{n-1,2})e^{-\frac{2(n-1)iz}{n}}. \end{cases} \tag{10}$$

Добавив в конец системы (10) граничное условие в единице ($y(1)=0$, т. е. уравнение $c_{n1}e^{iz}+c_{n2}e^{-iz}=0$) и последовательно, начиная с конца, выражая переменные c_{j1} ($j=1,\ 2,\ ...,\ n$) через остальные, получим

$$\begin{cases} c_{11}=e^{-\frac{2iz}{n}}\left\{-c_{12}+c_{22}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{32}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+...+c_{n2}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right\}, \\ c_{21}=e^{-\frac{4iz}{n}}\left\{-c_{22}+c_{32}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{42}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+...+c_{n2}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right\}, \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ c_{n1}=-e^{-\frac{2niz}{n}}c_{n2}. \end{cases} \tag{11}$$

Можно показать, что используя представление (7) и элементарные преобразования, система (9) сводится к системе

$$
\begin{cases}
c_{11}e^{\frac{iz}{n}} - c_{12}e^{-\frac{iz}{n}} - c_{21}e^{\frac{iz}{n}} + c_{22}e^{-\frac{iz}{n}} = \dfrac{ih_1}{z}\left(c_{11}e^{\frac{iz}{n}} + c_{12}e^{-\frac{iz}{n}}\right),\\
c_{21}e^{\frac{2iz}{n}} - c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}} - c_{31}e^{\frac{2iz}{n}} + c_{32}e^{-\frac{2iz}{n}} = \dfrac{ih_2}{z}\left(c_{21}e^{\frac{2iz}{n}} + c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}}\right),\\
\quad .\\
\quad .\\
\quad .\\
c_{n-1,1}e^{\frac{(n-1)iz}{n}} - c_{n-1,2}e^{-\frac{(n-1)iz}{n}} - c_{n1}e^{\frac{(n-1)iz}{n}} + c_{n2}e^{-\frac{(n-1)iz}{n}} = \dfrac{ih_{n-1}}{z}\left(c_{n-1,1}e^{\frac{(n-1)iz}{n}} + c_{n-1,2}e^{-\frac{(n-1)iz}{n}}\right)
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
c_{22} - c_{12} = \dfrac{ih_1}{2z}\left(c_{11}e^{\frac{2iz}{n}} + c_{12}\right),\\
c_{32} - c_{22} = \dfrac{ih_2}{2z}\left(c_{21}e^{\frac{4iz}{n}} + c_{22}\right),\\
\quad .\\
\quad .\\
\quad .\\
c_{n2} - c_{n-1,2} = \dfrac{ih_{n-1}}{2z}\left(c_{n-1,1}e^{\frac{2(n-1)iz}{n}} + c_{n-1,2}\right).
\end{cases}
\tag{12}
$$

Добавив в начало системы (12) граничное условие в нуле ($y(0)=0$, т. е. уравнение $c_{11}+c_{12}=0$) и подставив найденные в (11) коэффициенты c_{j1} ($j=1,\ 2,\ ...,\ n$), получим, что это уравнение и все остальные уравнения системы (12) примут вид

$$
\begin{cases}
\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\left\{c_{12} + c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}} + c_{32}e^{-\frac{4iz}{n}} + \ldots + c_{n2}e^{-\frac{2(n-1)iz}{n}}\right\} = 0,\\
-c_{12} + c_{22}\left(1-\dfrac{ih_1}{2z}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right) - c_{32}\dfrac{ih_1}{2z}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right) - \ldots - c_{n2}\dfrac{ih_1}{2z}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right) = 0,\\
-c_{22} + c_{32}\left(1-\dfrac{ih_2}{2z}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right) - c_{42}\dfrac{ih_2}{2z}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right) - \ldots - c_{n2}\dfrac{ih_2}{2z}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right) = 0,\\
\quad .\\
\quad .\\
-c_{n-1,2} + c_{n2}\left(1-\dfrac{ih_{n-1}}{2z}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right) = 0.
\end{cases}
$$

Данная система имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Обозначая через $a = e^{-\frac{2zi}{n}}$ и $b_k = -\frac{ih_k}{2z}(1-a)$ ($k = 1,\ 2,\ ...,\ n-1$), получим равенство (6). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Несложно заметить, что уравнение (6) можно представить в следующем рекурентном виде:

$$(1-a)\Delta_n = 0,$$

где $\Delta_n = (1-b_{n-1})\Delta_{n-1} + ab_{n-2}\Delta_{n-2} + a^2 b_{n-3}\Delta_{n-3} + ... + a^{n-3}b_2\Delta_2 + a^{n-2}(a+b_1)$, $\Delta_2 = 1 + a + b_1$.

Используя это представление, можно получить трансцендентные уравнения в случае, когда отрезок $[0,\ 1]$ разбит на k равных частей ($k = 2,\ 3,\ ...,\ n$). В частности, для случая $k = 2$ (т. е. отрезок $[0,\ 1]$ разбит на подотрезки $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$) трансцендентное уравнение имеет вид

$$\sin\frac{z}{2}\left(2\cos\frac{z}{2} + \frac{h_1}{z}\sin\frac{z}{2}\right) = 0.$$

В работе [6] для такого уравнения найдена асимптотика собственных значений при $n \to +\infty$.

Замечание 2.2. Результаты, аналогичные теореме 2.1, справедливы и для разделенных граничных условий вида ii) и iii). В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Собственные значения задачи* $\begin{cases} l[y] = \lambda y, \\ y(0) = y^{[1]}(1) = 0 \end{cases}$ *определяются из трансцендентного уравнения*

$$\begin{vmatrix} 1-a & a(1-a) & a^2(1-a) & a^3(1-a) & ... & a^{n-2}(1-a) & a^{n-1}c \\ -1 & 1+b_1 & ab_1 & a^2 b_1 & ... & a^{n-3}b_1 & -\frac{ih_1}{2z}a^{n-2}c \\ 0 & -1 & 1+b_2 & ab_2 & ... & a^{n-4}b_2 & -\frac{ih_2}{2z}a^{n-3}c \\ 0 & 0 & -1 & 1+b_3 & ... & a^{n-5}b_3 & -\frac{ih_3}{2z}a^{n-4}c \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1-\frac{ih_{n-1}}{2z}c \end{vmatrix} = 0, \qquad (13)$$

где $a = e^{-\frac{2zi}{n}}$, $c = 1 - \left(\frac{\alpha_n + iz}{\alpha_n - iz}\right)a$ и $b_k = -\frac{ih_k}{2z}(1-a)$ ($k = 1,\ 2,\ ...,\ n-2$).

Доказательство. Рассуждая аналогично, как при доказательстве теоремы 2.1, а именно добавив в конец системы (10) граничное условие в единице ($y^{[1]}(1)=0$, т. е. уравнение $c_{n1}e^{iz}+c_{n2}e^{-iz}\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}=0$) и последовательно, начиная с конца, выражая переменные c_{j1} ($j=1,\ 2,\ ...,\ n$) через остальные, получим

$$\begin{cases} c_{11}=e^{-\frac{2iz}{n}}\left\{-c_{12}+c_{22}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+\ldots+c_{n-1,2}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{n2}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right\},\\ c_{21}=e^{-\frac{4iz}{n}}\left\{-c_{22}+c_{32}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+\ldots+c_{n-1,2}e^{-\frac{2(n-4)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{n2}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right\},\\ \quad\cdot\\ \quad\cdot\\ \quad\cdot\\ c_{n-1,1}=e^{-\frac{2(n-1)iz}{n}}\left\{c_{n-1,2}+c_{n2}e\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right\},\\ c_{n1}=-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2niz}{n}}c_{n2}. \end{cases}$$

Далее, добавив в начало системы (12) граничное условие в 0 ($y(0)=0$, т. е. уравнение $c_{11}+c_{12}=0$) и подставив найденные выше коэффициенты c_{j1} ($j=1,\ 2,\ ...,\ n$), получим, что это уравнение и все остальные уравнения системы (12) примут вид

$$\begin{cases} c_{12}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+\ldots+c_{n-1,2}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{n2}e^{-\frac{2(n-1)iz}{n}}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)=0,\\ -c_{12}+c_{22}\left(1-\dfrac{ih_1}{2z}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right)-\ldots-c_{n-1,2}\dfrac{ih_1}{2z}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)-c_{n2}\dfrac{ih_1}{2z}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)=0,\\ -c_{22}+c_{32}\left(1-\dfrac{ih_2}{2z}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right)-\ldots-c_{n-1,2}\dfrac{ih_2}{2z}e^{-\frac{2(n-4)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)-c_{n2}\dfrac{ih_2}{2z}e^{-\frac{2(n-3)iz}{n}}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)=0,\\ \quad\cdot\\ \quad\cdot\\ -c_{n-1,2}+c_{n2}\left(1-\dfrac{ih_{n-1}}{2z}\left(1-\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)\right)=0. \end{cases}$$

Данная система имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Обозначая через $a=e^{-\frac{2zi}{n}}$, $c=1-\left(\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}\right)a$ и $b_k=-\dfrac{ih_k}{2z}(1-a)$ ($k=1,\ 2,\ ...,\ n-2$), получим равенство (13). Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Собственные значения задачи* $\begin{cases} l[y]=\lambda y, \\ y^{[1]}(0)=y^{[1]}(1)=0 \end{cases}$ *определяются из трансцендентного уравнения*

$$\begin{vmatrix} d-a & a(1-a) & a^2(1-a) & a^3(1-a) & \dots & a^{n-2}(1-a) & a^{n-1}c \\ -1 & 1+b_1 & ab_1 & a^2b_1 & \dots & a^{n-3}b_1 & -\frac{ih_1}{2z}a^{n-2}c \\ 0 & -1 & 1+b_2 & ab_2 & \dots & a^{n-4}b_2 & -\frac{ih_2}{2z}a^{n-3}c \\ 0 & 0 & -1 & 1+b_3 & \dots & a^{n-5}b_3 & -\frac{ih_3}{2z}a^{n-4}c \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-\frac{ih_{n-1}}{2z}c \end{vmatrix} = 0, \qquad (14)$$

где $a=e^{-\frac{2zi}{n}}$, $c=1-\left(\dfrac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}\right)a$, $d=\dfrac{\alpha_1+iz}{\alpha_1-iz}$ и $b_k=-\dfrac{ih_k}{2z}(1-a)$ ($k=1,\ 2,\ ...,\ n-2$).

Доказательство. Данная задача отличается от задачи теоремы 2.2 лишь граничным условием в нуле, а именно условием $y^{[1]}(0)=0$ (т. е. $c_{11}+\dfrac{\alpha_1+iz}{\alpha_1-iz}c_{12}=0$) вместо условия $y(0)=0$.

Уравнение $c_{11}+\dfrac{\alpha_1+iz}{\alpha_1-iz}c_{12}=0$ с учетом найденных при доказательстве теоремы 2.2 коэффициентов c_{j1} ($j=1,\ 2,\ ...,\ n$) примет вид

$$c_{12}\left(\frac{\alpha_1+iz}{\alpha_1-iz}-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+c_{22}e^{-\frac{2iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+\ldots+c_{n-1,2}e^{-\frac{2(n-2)iz}{n}}\left(1-e^{-\frac{2iz}{n}}\right)+$$
$$+\,c_{n2}e^{-\frac{2(n-1)iz}{n}}\left(1-\frac{\alpha_n+iz}{\alpha_n-iz}e^{-\frac{2iz}{n}}\right)=0,$$

а все остальные уравнения системы (12) перепишутся так же, как и в теореме 2.2. Теорема доказана.

В дальнейшем планируется, используя теорему 2.1 и ее аналоги – теоремы 2.2. и 2.3, исследовать асимптотическое поведение собственных значений соответствующих задач и получить формулы регуляризованных следов для них.

Список литературы

1. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differentrial Operators // AMS. Mathematical Surveys and Monographs. 1999. Vol. 61. 187 P.

2. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

3. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. о-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.

4. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.

5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.

6. *Конечная Н.Н., Тагирова Р.Н.* Асимптотика собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с δ-потенциалом // Развитие Северо-Арктического региона: проблемы и решения: материалы науч. конф. профессор.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов Сев. (Арктич.) федер. ун-та им. М.В. Ломоносова. Архангельск, 2015. С. 448–452.

References

1. Everitt W.N., Marcus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators. *AMS. Mathematical Surveys and Monographs*, 1999, vol. 61. 187 p.

2. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1999, vol. 66, no. 6, pp. 897–912.

3. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami [Sturm–Liouville Operators with Distributional Potentials]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 2003, vol. 64, pp. 159–212.

4. Savchuk A.M. Regulyarizovannyy sled pervogo poryadka operatora Shturma–Liuvillya s δ-potentsialom [Regularized Trace of the First-Order for the Sturm–Liouville Operator with δ-Potential]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2000, vol. 55, no. 6, pp. 155–156.

5. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Formula sleda dlya operatorov Shturma–Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Trace Formula for the Sturm – Liouville Operators with Singular Potentials. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, vol. 69, no. 3, pp. 427–442.

6. Konechnaya N.N., Tagirova R.N. Asimptotika sobstvennykh znacheniy operatora Shturma–Liuvillya s δ-potentsialom [The Asymptotics of the Eigenvalues of the Sturm–Liouville Operator with δ-Potential]. *Razvitie Severo-Arkticheskogo regiona: problemy i resheniya: materialy nauch. konf. professor.-prepodavat. sostava, nauch. sotrudnikov i aspirantov Sev. (Arktich.) feder. un-ta im. M.V. Lomonosova* [Development of the Northern Arctic Region: Problems and Solutions: Proc. Sci. Conf. Acad. Teaching Staff, Sci. Staff and Postgraduate Students of the Northern (Arctic) Federal Univ. named after M.V. Lomonosov]. Arkhangelsk, 2015, pp. 448–452.

doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.2.115

T.A. Safonova*, S.V. Ryabchenko*

*Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russian Federation)

ON THE EIGENVALUES OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A SINGULAR POTENTIAL

The asymptotic behavior of the eigenvalues and eigenfunctions depending on the coefficients of the differential expression as well as the regularized trace formulas for the corresponding operators are highly relevant in the modern spectral theory of differential operators. In the case of the Sturm–Liouville operator with a continuously differentiable potential the basic results were obtained by I.M. Gelfand and B.M. Levitan in 1953. Later, in the works of L.A. Dikiy, V.A. Sadovnichiy, V.B. Lidskiy, V.A. Marchenko

Corresponding author: Tat'yana Safonova, *address:* Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation; *e-mail:* t.Safonova@narfu.ru

and other mathematicians, these results were extended for the case of the higher orders differential operators and partial differential operators. A.A. Shkalikov and A.M. Savchuk first considered similar issues in 1999–2003 for the Sturm–Liouville operator with a singular potential, which was not locally integrable function, and Dirichlet boundary conditions on a finite interval. In the relatively recent works of A.G. Kostyuchenko and S.R. Ismagilov (2007–2008) the leading term of the asymptotics of the counting function for the self-adjoint extensions of the Sturm-Liouville vector operator generated by the expression $l[y]=-y''(x)+Q(x)y(x)$ in the space $L_2^2(R_+)$ was obtained, where $Q(x)$ – a real symmetric square matrix of the second order.This paper is devoted to finding the transcendental equations for the eigenvalues of the self-adjoint operator generated by the expression $l[y](x)=-y''(x)+\sum_{k=1}^{n-1}h_k\delta(x-x_k)y(x)$, where $x_k=\frac{k}{n}$, $h_k\in R$ ($k=1,2,...,n-1$), and $\delta(x)$ – δ- delta function, and separated boundary conditions of the form $y(0)=y(1)=0,$ $y(0)=y^{[1]}(1)=0,$ $y^{[1]}(0)=y^{[1]}(1)=0$ in the space $L^2[0,1]$. The further analysis of received equations allows us to obtain the asymptotics of the eigenvalues and the first order regularized trace formula for these operators.

Keywords: *quasiderivative, Sturm–Liouville operator with a singular potential, eigenvalue.*

Received on December 02, 2015