

УДК 533.72

ГУЛАКОВА Светлана Викторовна, аспирант кафедры прикладной математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 5 научных публикаций

ПОПОВ Василий Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 158 научных публикаций, в т. ч. трех монографий

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ВИЛЬЯМСА

В рамках кинетического подхода построено аналитическое решение задачи о течении Пуазейля. В качестве основного уравнения используется линеаризованное уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель диффузного отражения. Построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислена приходящаяся на единицу ширины канала величина потока массы газа. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными с использованием численных методов.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, течение Пуазейля, точные аналитические решения.

Введение. Одной из важнейших в прикладном отношении задач динамики разреженного газа является задача о течении разреженного газа в каналах [1]. Ее строгое теоретическое решение в промежуточной области значений чисел Кнудсена, где неприменимы концепции сплошной среды или свободномолекулярного режима, должно получаться в результате интегрирования уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул разной природы) при соответствующих граничных и начальных условиях. После того как найдена функция распределения, с помощью квадратур определяются любые макро-

скопические величины (скорость, температура, давление, тепловой поток и т. д.). В общем случае для решения задач динамики разреженного газа в переходном режиме используют методы прямого численного моделирования. Однако при таком подходе требуется наличие мощных вычислительных ресурсов как в плане оперативной памяти, так и в плане процессорного времени. В силу этого актуальным является развитие и применение к моделированию процессов переноса в каналах аналитических методов [2, 3]. Целью представленной работы является обобщение предложенного в [4] аналитического метода на случай математического

моделирования процессов переноса в задаче о течения Пуазейля с использованием уравнения Вильямса [2]. В качестве граничного условия на стенках канала в работе используется модель диффузного отражения.

Постановка задачи. Построение функции распределения. Рассмотрим установившееся движение газа в канале, образованном двумя параллельными плоскостями. Будем полагать, что температура поверхностей, образующих канал, всюду постоянна и равна T , а движение газа происходит под действием очень малого градиента давления [4]. В этом случае функцию распределения можно искать в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(y) \beta^{3/2} \pi^{-3/2} [1 + C_z G_n Z(x; C_x)]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m / 2k_B T$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура газа,

$x = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \frac{x'}{l_g}$ и $y = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \frac{y'}{l_g}$ – безразмерные координаты, G_n – безразмерный градиент давления,

а для нахождения $Z(x, \mu)$ приходим к краевой задаче [3]:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial \delta} + \psi + \frac{1}{N} = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) d\mu' \int_0^{+\infty} \exp(-C'^2) C'^5 \psi(x, \mu', C') dC', \quad (2)$$

$$\psi(-d, \mu, C) = 0; \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (3)$$

$$\psi(d, \mu, C) = 0; \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (4)$$

При записи (2) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей $C_x = C \cos \theta$, $C_y = C \sin \theta \cos \chi$, $C_z = C \sin \theta \sin \chi$, выполнили в полученном выражении интегрирование по азимутальному углу χ от 0 до 2π и ввели обозначение $\mu = \cos \theta$. Решение (2) ищем в виде

$$\psi(x, \mu, C) = \psi_1(x, \mu) + \left(\frac{1}{C} - \alpha \right) \psi_2(x, \mu), \quad \alpha = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), приходим к системе уравнений для нахождения $\psi_1(x, \mu)$ и $\psi_2(x, \mu)$

$$\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \psi_1(x, \mu) + \gamma = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) \psi_1(x, \mu') d\mu',$$

$$\gamma = \frac{15\sqrt{\pi}}{16}, \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \psi_2(x, \mu) + 1 = 0. \quad (7)$$

Граничные условия с учетом (3), (4) запишем в виде ($k = 1, 2$):

$$\psi_k(-d, \mu) = 0; \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (8)$$

$$\psi_k(d, \mu, C) = 0; \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (9)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение уравнения (7) с граничными условиями (8), (9) имеет вид

$$\psi_2(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) H_+(\mu) + \exp\left(-\frac{x-d}{\mu}\right) H_+(-\mu) - 1, \quad (10)$$

где $H_+(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 0, \\ 1, & \text{если } \mu > 0 \end{cases}$ – ступенчатая

функция Хэвисайда.

Решение уравнения (6) ищем в виде

$$\psi_1(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta) F(\eta, \mu) d\eta + \gamma(x^2 - 2x\mu + 2\mu^2), \quad (11)$$

где A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta, \mu) = \frac{3}{4} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1 - \eta^2} \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(\eta) = 1 + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau^2) d\tau}{\tau - z},$$

$F(\eta, \mu)$ – собственные векторы непрерывного спектра, $\lambda(z)$ – дисперсионная функция Вильямса [2], $P \frac{1}{\eta - \mu}$ и $\delta(\eta - \mu)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении

интеграла от $1/z$ и дельта-функция Дирака. Подставляя (11) в граничные условия (8), (9), после преобразований, приведенных в [3], приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta [b(\eta; -d) + b(-\eta; d)] d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} [b(\mu; -d) + b(-\mu; d)] = \\ & = 2 \left[-A_0 - \gamma (d^2 + 2\mu d + 2\mu^2) \right] - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta [b(-\eta; -d) + b(\eta; d)] d\eta}{\eta + \mu}, \\ & \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta [b(\eta; -d) - b(-\eta; d)] d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} [b(\mu; -d) - b(-\mu; d)] = \\ & = 2A_1(d + \mu) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta [b(-\eta; -d) - b(\eta; d)] d\eta}{\eta + \mu}, \\ & b(\eta; d) = \exp \left(-\frac{x}{\eta} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что второе уравнение системы обращается в тождество при $A_1 = 0$ и $a(-\eta) = a(\eta)$. Первое уравнение при этом запишется в виде

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta; -d) d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1 - \mu^2} b(\mu; -d) = f(\mu), \quad (12)$$

$$f(\mu) = -A_0 - \gamma (d^2 + 2\mu d + 2\mu^2) - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta; d) d\eta}{\eta + \mu}. \quad (13)$$

Решение (12) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta b(\eta; -d) d\eta}{\eta - z}. \quad (14)$$

Учитывая краевые значения функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза и используя решение задачи факторизации, полученное в [2], сингулярное интегральное уравнение (12) сведем к краевой задаче Римана на отрезке $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} & N^+(\mu) X^+(\mu) - N^-(\mu) X^-(\mu) = \\ & = \frac{3}{2} \frac{X^-(\mu)}{X^+(\mu)} \pi i \mu (1 - \mu^2) f(\mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Разрезы функций, входящих в (15), совпадают с контуром краевого условия, следовательно, получили задачу отыскания кусочно-

аналитической функции по заданному скачку. Ее решения записываем на основании формул Сохоцкого:

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu) \mu (1 - \mu^2) f(\mu) d\mu}{\lambda^-(\mu) (\mu - z)}. \quad (16)$$

Раскладывая (16) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (15):

$$\frac{3}{4} \int_0^1 \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} \mu (1 - \mu^2) f(\mu) d\mu = 0. \quad (17)$$

Подставляя (13) в (17), находим коэффициент A_0

$$A_0 = -\gamma (d^2 + 2X_2 d + 2X_3) + \frac{3}{4} \int_0^1 \eta X(-\eta) b(\eta; d) d\eta. \quad (18)$$

Здесь $X_2 = V_1$, $X_3 = V_2 + \frac{1}{2} V_1^2$, $V_1 = 0,581946$, $V_2 = \frac{3}{14}$, а для нахождения коэффициентов $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} & a(\mu) = - \frac{(1 - \mu^2) X(-\mu) \exp(-d/\mu)}{5 |\lambda^+(\mu)|^2} \times \\ & \times \left[2\gamma (\mu + d + X_2) + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\eta X(-\eta) a(\eta) \exp(-d/\eta) d\eta}{\eta + \mu} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) ищем в виде степенного ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим коэффициенты $a_k(\mu)$

$$a_0(\mu) = 2\gamma h(\mu) [\mu + d + X_2],$$

$$a_1(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1) [\eta_1 + d + X_2] d\eta_1}{\eta_1 + \mu},$$

$$a_2(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^1 \frac{g(\eta_2) [\eta_2 + d + X_2] d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1},$$

$$a_k(\mu) = 2\gamma h(\mu) \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \mu} \int_0^1 \frac{g(\eta_2) d\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \dots$$

$$\dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k) [\eta_k + d + X_2] d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$g(\mu) = -\frac{\mu(1-\mu^2)X^2(-\mu)\exp(-2d/\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2},$$

$$h(\mu) = -\frac{(1-\mu^2)X(-\mu)\exp(-d/\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2}.$$

Таким образом, коэффициенты A_0 и $a(\mu)$ в разложении решения исходной задачи по собственным векторам дискретного и непрерывного спектра получены и функция распределения (1) построена.

Вычисление макропараметров газа в канале. Профиль массовой скорости газа в канале построим, исходя из статистического смысла функции распределения

$$u'_z(x') = \frac{1}{n} \int \mathbf{v}_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \beta^{-1/2} U_n(x) G_n$$

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3C. \quad (21)$$

Здесь $U_z(x)$ – безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (5) в (21), получаем

$$U_y(x) = \frac{\gamma}{2} \left[x^2 - d^2 - 2X_2d - 2X_3 + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k [I_k + J_k(x)] \right] -$$

$$- \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{9\pi}{32} \right) \left[1 - \frac{3}{4} \int_0^1 (1-\mu^2) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\mu}\right) \right] d\mu \right]. \quad (22)$$

Поток массы газа в направлении оси Oz' , приходящийся на единицу ширины канала, вычислим согласно [5–7]

$$J_M = -\frac{1}{2d^2} \int_{-d}^d U_y(x) dx. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23), после преобразований находим

$$J_M = \gamma \left[\frac{D}{6} + X_2 + \frac{1}{D} \left[2X_3 - \frac{4}{5} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k I_k \right] \right] -$$

$$- \frac{1}{D^2} \left[\frac{3}{2} \gamma \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k K_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{16}{9\pi} \right) \int_0^1 \mu (1-\mu^2) \left[1 - \exp\left(-\frac{D}{\mu}\right) \right] d\mu \right]. \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ J_0(x) \\ K_0 \end{Bmatrix} = \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} [\eta + d + X_2] d\tau,$$

$$\begin{Bmatrix} I_k \\ J_k(x) \\ K_k \end{Bmatrix} = \int_0^1 \begin{Bmatrix} g(\tau) \\ \gamma(x, \tau) \\ \zeta(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} \dots \int_0^1 \frac{g(\eta_k) [\eta_k + d + X_2] d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}},$$

$$\gamma(x, \eta) = -\frac{(1-\eta^2)X(-\eta) \left[\exp\left(\frac{x-d}{\eta}\right) + \exp\left(-\frac{x+d}{\eta}\right) \right]}{5|\lambda^+(\eta)|^2},$$

$$\zeta(\eta) = -\frac{2\eta(1-\eta^2)X(-\eta) \left[1 - \exp\left(-\frac{2d}{\eta}\right) \right]}{5|\lambda^+(\eta)|^2}.$$

Значения J_M , вычисленные согласно (24), приведены в *таблице*. Там же приведены значения J_M , вычисленные в [5–7] с использованием методов прямого численного моделирования на основе линеаризованного уравнения Больцмана (LBE) и модельных кинетических уравнений с операторами столкновений в форме БГК модели (BGK), модели Шахова (S) и модели с синтетическим ядром (CES), а также полученные в [4] с использованием аналитических методов на основе БГК модели.

ЗАВИСИМОСТЬ J_M ОТ D'/l_g

D'/l_g	(24)	BGK [3]	BGK [7]	LBE [5]	S [6]	CES [6]
0,1	2,1296	2,0345	2,0327		2,0395	1,9259
0,5	1,6372	1,6023	1,6019			
1,0	1,5446	1,5371	1,5387		1,5536	1,4863
5,0	1,9445	1,9908	1,9907	1,9106		
10,0	2,7148	2,7687	2,7686	2,7056	2,7799	2,7220
20,0	4,3434	4,3975	4,9740	4,3450		
50,0	9,3182	9,3700		9,3260		
100,0	17,6930	17,6930	17,6930	17,6930		

Как следует из *таблицы*, полученные в работе результаты находятся в хорошем согласии с аналогичными результатами для произвольной толщины канала [4, 5–7].

Закключение. Итак, в работе с использованием уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля построен профиль массовой скорости газа в канале и вычислен расход массы

газа, приходящийся на единицу ширины канала. Проведенное сравнение показало, что построенное решение приводит к корректным результатам при произвольной толщине канала. В случае, когда $D' \gg l_g$, полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты, полученные в рамках классической гидродинамики.

Список литературы

1. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М., 1977. 184 с.
2. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: моногр. М., 2004. 271 с.
3. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля с использованием эллипсоидально-статистической модели кинетического уравнения Больцмана // Прикладная механика и техническая физика. 2012. № 4. С. 48–56.
4. Попов В., Тестова И., Юшканов А.А. Математическое моделирование течений газа в каналах: моногр. Saarbrücken, 2012. 116 с.
5. Loyalka S.K., Hickey K.A. Plane Poiseuille Flow: Near Continuum Results for a Rigid Sphere Gas // Physica A. 1989. V. 160, № 3. P. 395–408.
6. Siewert C.E. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation // European J. of Mechanics B/Fluids. 2002. Vol. 21. P. 579–497.
7. Siewert C.E., Garcia R.D.M., Grandjean P. A Concise and Accurate Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel // J. of Mathematical Physics. 1980. Vol. 21. P. 2760–2763.

References

1. Koshmarov Yu.A., Ryzhov Yu.A. *Prikladnaya dinamika razrezhennogo gaza* [Applied Dynamics of Rarefied Gas]. Moscow, 1977. 184 p.
2. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Kineticheskie uravneniya tipa Vil'yamsa i ikh tochnye resheniya* [Williams Kinetic Equations and Their Exact Solutions]. Moscow, 2004. 271 p.
3. Popov V.N., Testova I.V., Yushkanov A.A. Analiticheskoe reshenie zadachi o techenii Puazeylya s ispol'zovaniem ellipsoidal'no-statisticheskoy modeli kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana [Analytical Solution of the Poiseuille Flow Problem Using the Ellipsoidal-Statistical Model of the Boltzmann Kinetic Equation]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2012, no. 4, pp. 48–56.

4. Popov V., Testova I., Yushkanov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie techeniy gaza v kanalakh* [Mathematical Modeling of Gas Flows in Channels]. Saarbrücken, 2012. 116 p.
5. Loyalka S.K., Hickey K.A. Plane Poiseuille Flow: Near Continuum Results for a Rigid Sphere Gas. *Physica A*, 1989, vol. 160, no. 3, pp. 395–408.
6. Siewert C.E. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2002, vol. 21, pp. 579–497.
7. Siewert C.E., Garcia R.D.M., Grandjean P. A Concise and Accurate Solution for Poiseuille Flow in a Plane Channel. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, pp. 2760–2763.

Gulakova Svetlana Viktorovna

Postgraduate Student, Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

Popov Vasily Nikolaevich

Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

MATHEMATICAL MODELLING OF TRANSPORT PROCESSES IN THE PROBLEM OF POISEUILLE FLOW ON THE BASIS OF WILLIAMS EQUATION

The paper provides an analytical solution to the problem of Poiseuille flow using the kinetic approach. As the basic equation we used the linearized Williams equation, and as a boundary condition on the channel walls we used a diffuse reflection model. The structure of mass rate of gas and mass flux per unit of channel width were calculated. The results were compared with the analogous data obtained by numerical methods.

Keywords: Boltzmann equation, model kinetic equations, Poiseuille flow, exact analytical solution.

Контактная информация:

Гулакова Светлана Викторовна

адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68, корп. 3;

e-mail: s.gulakova@narfu.ru

Попов Василий Николаевич

адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68, корп. 3;

e-mail: v.popov@agtu.ru

Рецензент – Воробьев В.А., доктор технических наук, профессор кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова