УДК 514.172.2

СТАРОСТИНА Вера Валерьевна, *аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор двух научных публикаций*

*ЛЕММА РИНОВА О НОРМИРОВАННОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ, ВЫПУКЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫДЕЛЕННОГО СЕМЕЙСТВА ОТРЕЗКОВ**

Взаимное расположение прямых линий играет важную роль в геометрии геодезических пространств. Особое значение в ряде случаев придается параллельным прямым, т. е. прямым, расстояние Хаусдорфа между которыми конечно. В общем случае параллельность не влечет за собой каких-то особых свойств. Особый случай – так называемые выпуклые пространства, или пространства неположительной кривизны. В этом случае поведение параллельных прямых жестко регулируется классической леммой Ринова, утверждающей, что любые две параллельные прямые в пространстве неположительной кривизны в смысле Буземана ограничивают нормированную полосу, т. е. выпуклое подмножество, изометричное полосе между двумя параллельными прямыми на плоскости, оснащенной строго выпуклой нормой.

В статье доказывается обобщение леммы на случай пространств неположительной кривизны по Буземану относительно выделенного семейства отрезков. Под выделенным семейством отрезков в геодезическом пространстве понимается такое семейство Σ, что любые две точки пространства соединяются единственным отрезком из Σ, и всякий отрезок, содержащийся в отрезке из Σ, также принадлежит Σ. Свойство выпуклости пространства относительно Σ означает, что в произвольном треугольнике, образованном отрезками из Σ, средняя линия не превосходит половины основания.

Основная теорема утверждает, что в пространстве неположительной кривизны по Буземану относительно выделенного семейства отрезков всякие две выделенные прямые ограничивают слабую нормированную полосу, т. е. слабо выпуклое подмножество, изометричное полосе между двумя параллельными аффинными прямыми в нормированной плоскости. Это позволяет развить методы геометрии пространств неположительной кривизны на случай G-пространств с выделенной системой отрезков.

При доказательстве основной теоремы применяется процедура предельного перехода по неглавному ультрафильтру. Поскольку существование неглавного ультрафильтра на множестве натуральных чисел

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00219 А.

является следствием аксиомы выбора, доказательство нельзя считать конструктивным. Проблема доказательства леммы Ринова в заданном классе пространств без использования ультрафильтров тесно связана с существованием Σ-выпуклой нормированной полосы.

Ключевые слова: *лемма Ринова, нормированная полоса, слабая выпуклость, неположительная кривизна, выделенное семейство отрезков.*

Геометрия параллельных прямых играет важную роль при изучении геодезических пространств. В случае так называемых выпуклых пространств параллельные прямые обладают замечательным свойством, которое было доказано немецким геометром В. Риновым [1]: любые две параллельные прямые в выпуклом пространстве ограничивают нормированную полосу, т. е. выпуклое подмножество, изометричное полосе, заключенной между двумя параллельными прямыми на некоторой нормированной плоскости со строго выпуклой нормой. Лемма Ринова служит мощным инструментом при изучении геометрии пространств неположительной кривизны: она применяется в доказательстве целого ряда теорем о расщеплении, теоремы о нормированной полуплоскости, при решении проблем, связанных с геометрией параллельных прямых в указанном классе пространств.

В настоящей работе доказывается обобщение этой леммы на случай пространств неположительной кривизны по Буземану относительно выделенного семейства отрезков. Свойство неположительности кривизны относительно выделенного семейства отрезков было введено Г. Буземаном и Б. Фадке в [2] для G-пространств Буземана. Применительно к геодезическим пространствам понятие пространств неположительной кривизны относительно выделенной системы отрезков Σ определено в статье Е.Н. Сосова [3], а также в работе Б. Клейнера [4], где пространства указанного класса называются «часто выпуклыми пространствами» (often convex spaces).

Для пространств рассматриваемого нами класса понятие выпуклости подмножеств не имеет однозначного определения. В разных контекстах рассматриваются сильная или слабая выпуклость, а также Σ-выпуклость, т. е. выпуклость относительно семейства отрезков Σ. Допустимы и иные подходы к выпуклости. В нашей работе мы доказываем слабую версию леммы Ринова. Иначе говоря, мы доказываем, что в пространстве неположительной кривизны по Буземану относительно выделенного семейства отрезков всякие две выделенные прямые ограничивают слабую нормированную полосу. Понятно, что сильная версия леммы Ринова в общем случае не выполняется. Вопрос о справедливости леммы Ринова в смысле Σ-выпуклости остается открытым.

Необходимые сведения из геометрии пространства неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков.

Пусть (X, d) – геодезическое пространство, т. е. метрическое пространство с внутренней метрикой, в котором любые две точки можно соединить отрезком. Под отрезком, соединяющим точки $x, y \in X$, здесь понимается образ в X спрямляемого пути с концами x и y, длина которого равна $d(x, y)$.

Семейство отрезков Σ называется выделенным семейством, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

A. Любые две точки в X соединяются единственным отрезком семейства Σ.

B. Для любого выделенного отрезка семейства Σ всякий содержащийся в нем отрезок также принадлежит Σ.

Если в X выделено такое семейство Σ, тройку (X, d, Σ) мы называем пространством с выделенным семейством отрезков. Луч $c\colon [0, \infty) \to X$ в X называется выделенным лучом, если он образован отрезками выделенного семейства вида $c([0, a])$ при $a \to \infty$. Прямая $c: R \to X$ в X называется выделенной прямой, если она образована отрезками выделенного семейства вида $c([-a, a])$ при $a \to \infty$.

Пространство (X, d, Σ) называется пространством неположительной кривизны относительно выделенной системы отрезков Σ, если помимо аксиом A и B в нем выполнена также следующая аксиома неположительности кривизны: если m – середина выделенного отрезка $[xy]$ и n – середина выделенного отрезка $[xz]$, то

$$d(m,n) \le \frac{1}{2} d(y,z).$$

Подмножество $A \subseteq X$ в геодезическом пространстве X называется слабо выпуклым, если для любых двух точек $a, b \in A$ существует отрезок с концами a, b, содержащийся в A. Подмножество $A \subseteq X$ в пространстве (X, d, Σ) называется Σ-выпуклым, если для любых двух точек $a, b \in A$ выделенный отрезок с концами a, b содержится в A.

Далее нам понадобится понятие предела последовательности по неглавному ультрафильтру. Общая теория фильтров и пределов по фильтру представлена, например, в [5]. Мы используем следующее определение.

Пусть ω – неглавный ультрафильтр на N. Точка $b \in X$ метрического пространства (X, d) называется пределом последовательности a_n по ω, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$A_\varepsilon = \{n \in N | d(a_n, b) < \varepsilon\}$

принадлежит ω. Обозначение:

$$b = \lim_{\omega} a_n.$$

Основная теорема. Пусть (X, d, Σ) – конечно компактное пространство неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков Σ.

Теорема. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : R \to X$ – две натурально параметризованные выделенные прямые. Если функция $f(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ограничена, то прямые γ_1 и γ_2 ограничивают в X слабую нормированную полосу, т. е. слабовыпуклое подмножество, изометричное полосе аффинной плоскости, оснащенной нормой.

Доказательство. Зафиксируем положительное направление выделенных прямых $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ $(t \to +\infty)$. Из каждой точки $c(s)$ выделенного отрезка $[\gamma_1(0)\gamma_2(0)] \in \Sigma$, заданного натуральной параметризацией $c : [0, d(\gamma_1(0)\gamma_2(0))]X \to \to X$, в положительном направлении можно провести однозначно определенный выделенный луч $\delta_s : [0, +\infty) \to X$, асимптотичный γ_1 и γ_2. Множество таких выделенных лучей образует полуполосу S между γ_1 и γ_2. Докажем, что полуполоса S является слабо выпуклым подмножеством в X.

Пусть $x = \delta_r(u)$ и $y = \delta_s(v)$. Покажем, что точки x и y можно соединить отрезком, содержащимся в S. Не уменьшая общности, можно считать, что $r < s$ (в случае $r = s$ утверждение очевидно) и что $u \le v$. Для произвольного $\lambda \in [0, 1]$ обозначим:

$z_\lambda = \delta_{(1-\lambda)r+\lambda s}((1 - \lambda)u + \lambda v)$.

В частности, $x = z_0$, и $y = z_1$. Покажем, что при $0 < \lambda < 1$ выполнено условие $x - z_\lambda - y$. Действительно, поскольку выделенные прямые γ_1 и γ_2 параллельны, функция

$P_k(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t + k))$

при произвольно заданном фиксированном k является константой. В частности, это верно при
$$k = \frac{d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))}{(s-r)} \cdot (v-u).$$

Обозначим P_k постоянное значение этой функции. Из асимптотичности лучей δ_r и δ_s следует, что

$d(x, y) \le d(\delta_r(0), \delta_s(v - u))$, откуда, в силу постоянства функции $P_k(t)$, вытекают равенства

$$d(x, y) = d(\delta_r(0), \delta_s(v-u)) = \frac{s-r}{d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))} \cdot P_k.$$

Аналогично

$$d(x, z_\lambda) = d(\delta_r(0), \delta_{(1-\lambda)r+\lambda s}(-\lambda u + \lambda v)) = \\ = \frac{(1-\lambda)r + \lambda s - r}{d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))} \cdot P_k$$

и

$$d(z_\lambda, y) = d(\delta_{(1-\lambda)r+\lambda s}(-\lambda u + \lambda v), \delta_s(v-u)) = \\ = \frac{s - (1-\lambda)r - \lambda s}{d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))} \cdot P_k.$$

Отсюда получаем

$$d(x, y) = d(x, z_\lambda) + d(z_\lambda, y),$$

что и означает выполнение требуемого условия. Таким образом, при изменении параметра λ от 0 до 1 точки z_λ образуют отрезок с концами x и y.

Для каждого целого отрицательного параметра $s = -n$; $n \in N$ выделенные лучи, имеющие начало в точках отрезка $[\gamma_1(s)\gamma_2(s)] \in \Sigma$ и асимптотичные γ_1 и γ_2, также образуют различные полуполосы, соответствующие параметрам s. Последовательность отображений $F_n : D_n \to X$, где

$D_n = \{(u, v) \mid u \in [-n, +\infty), v \in [0, d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))]\}$ – множество точек аффинной полосы, задает последовательность полуполос. При фиксированных значениях u и v последовательность точек $F_n(u, v) \in X$ ограничена. Пространство X, по условию, конечно компактно, поэтому существует предел $F_n(u, v)$ по произвольному неглавному ультрафильтру на множестве натуральных чисел N. Зафиксировав такой неглавный ультрафильтр ω, обозначим

$$F(u,v) = \lim_{\omega} F_n(u,v)\,. \tag{1}$$

Получаем, что γ_1 и γ_2 ограничивают в X слабо выпуклую полосу как предел слабо выпуклых полуполос F_n.

Наконец, определим норму на R^2, соответствующую полосе

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq R^2$$

и ее отображению $F : D \to X$, определенному пределом (1):

$$\|(u,v)\| = \begin{cases} |u|, & \text{при } v = 0 \\ \dfrac{|v|}{d(\gamma_1(0),\gamma_2(0))} d\left(\gamma_1(0), \gamma_2\left(\dfrac{d(\gamma_1(0),\gamma_2(0))}{v}u\right)\right), & \text{при } v \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Проверка того факта, что функция (2) является нормой, стандартна. Положительная однородность и симметричность функции $\|(u, v)\|$ очевидны, проверка неравенства выпуклости основывается на свойствах выпуклости метрики в пространстве X. □

Возможные приложения. В работе П.Д. Андреева [6] доказано, что всякое G-пространство Буземана неположительной кривизны по Буземану является топологическим многообразием. Это подтверждает в классе G-пространств неположительной кривизны гипотезу о топологическом строении общих G-пространств, сформулированную Г. Буземаном в [7]. Доказанная в настоящей статье теорема позволяет развить методы П.Д. Андреева на случай G-пространств с выделенной системой отрезков.

Возможное усиление доказанной теоремы может быть получено при рассмотрении понятия Σ-выпуклости вместо слабой выпуклости. Здесь мы можем сформулировать гипотезу: пусть (X, d, Σ) – конечно компактное пространство неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков Σ, и $\gamma_1, \gamma_2 : R \to X$ – две натурально параметризованные выделенные прямые. Если функция $d(\gamma_1(s)\ \gamma_2(s))$ ограничена, то прямые γ_1 и γ_2 ограничивают в X Σ-нормированную полосу, т. е. Σ-выпуклое подмножество, изометричное полосе аффинной плоскости, оснащенной нормой.

Список литературы

1. *Rinow W.* Die innere Geometrie der metrischen Räume. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin; N. Y.; Heidelberg, 1961.
2. *Busemann H., Phadke B.B.* Spaces with Distinguished Geodesics. N. Y.; Basel; Marcel, 1987.
3. *Сосов Е.Н.* Касательное пространство по Буземану // Изв. вузов. Математика. 2005. № 6. С. 71–75.
4. *Kleiner B.* Local Structure of Length Spaces with Curvature Bounded Above // Mathematische Zeitschrift. 1999. Vol. 231, is. 5. P. 409–456.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология. М., 1958.

6. *Андреев П.Д.* Доказательство гипотезы Буземана для G-пространств неположительной кривизны // Алгебра и анализ. 2014. № 2. С. 1–20.
7. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. М., 1962. 503 с.

References

1. Rinow W. *Die innere Geometrie der metrischen Räume. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin; New York; Heidelberg, 1961.
2. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with Distinguished Geodesics*. New York; Basel; Marcel, 1987.
3. Sosov E.N. Kasatel'noe prostranstvo po Buzemanu [Busemann Tangent Space]. *Izvestia vuzov. Matematika,* 2005, no. 6, pp. 71–75.
4. Kleiner B. Local Structure of Length Spaces with Curvature Bounded Above. *Mathematische Zeitschrift*, 1999, vol. 231, iss. 5, pp. 409–456.
5. Burbaki N. *Obshhaja topologija* [General Topology]. Moscow, 1958.
6. Andreev P.D. Dokazatel'stvo gipotezy Buzemana dlja G-prostranstv nepolozhitel'noj krivizny [Proof of the Busemann Hypothesis for G-Spaces of Non-Positive Curvature]. *Algebra i analiz,* 2014, no. 2, pp. 1–20.
7. Busemann H. *Geometrija geodezicheskih* [Geometry of the Geodesic]. Moscow, 1962. 503 p.

Starostina Vera Valeryevna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Rusia)

RINOW NORMED STRIP LEMMA FOR THE SPACES, CONVEX WITH RESPECT TO DISTINGUISHED FAMILY OF SEGMENTS

Mutual arrangement of straight lines is very important in the geometry of geodesic spaces. Parallel lines, i.e. the Hausdorff distance between them is finite, are of particular importance in some cases. In general, the parallelism does not imply any special properties. A special case is the so-called convex spaces, or spaces of nonpositive curvature. In this case, the behavior of parallel lines is tightly regulated by a classical Rinow lemma, which states that any two parallel lines in the nonpositive curvature space in the sense of Busemann limit a normed strip, that is a convex subset isometric to a strip between two parallel lines on the plane, equipped with a strictly convex norm. In this paper we prove a generalization of Lemma in the class of spaces of Busemann nonpositive curvature with respect to the distinguished family of segments. Under the distinguished family of segments in a geodesic space is understood a family of Σ, that any two points of space are connected by a unique segment of Σ, and every segment containing in the segment from Σ, also belongs to Σ. Convexity space property with respect to Σ means that in any triangle formed by segments of Σ, the middle line does not exceed half of the base. The main theorem asserts that in the space of nonpositive curvature in the sense of Busemann with respect to the distinguished family of segments any two distinguished lines limit weak normed strip, that is weakly convex subset isometric to the strip between two parallel affine lines in the normed plane. This fact allows us to develop the methods of geometry of spaces of nonpositive curvature in case of G-spaces with a distinguished segments system. The limiting procedure of nonprincipal ultrafilter passage to the limit is used in the proof of the main theorem. Since the existence of a nonprincipal ultrafilter on the set of natural numbers is a consequence of the axiom of choice, one can not consider the proof as constructive. The problem of the proof of Rinow Lemma in a given class of spaces without the use of ultrafilters is closely connected with the existence of Σ-convex normed strip.

Keywords: *Rinow lemma, normed strip, weak convexity, nonpositive curvature, distinguished family of segments.*

Контактная информация:
адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68;
e-mail: irrefragable@yandex.ru

Рецензент – *Попов В.Н.*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова