Вестник САФУ. Сер.: Естеств. науки. 2016. № 1. С. 104–113.

УДК 517.927.25 doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.1.104

КОНЕЧНАЯ Наталья Николаевна
Институт математики, информационных и космических технологий
Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова
адрес: 163002, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68, к. 3; *e-mail:* n.konechnaya@narfu.ru

САФОНОВА Татьяна Анатольевна
Институт математики, информационных и космических технологий
Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова
адрес: 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *e-mail:* t.Safonova@narfu.ru

ТАГИРОВА Рена Насировна
Институт математики, информационных и космических технологий
Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова
адрес: 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17; *e-mail:* tagirova_rena@mail.ru

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С δ-ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Одной из интересных задач спектральной теории операторов является изучение асимптотического поведения функции распределения при больших значениях спектрального параметра λ. Частным случаем этой задачи является изучение асимптотики собственных значений, собственных функций в зависимости от свойств коэффициентов дифференциального выражения и получение формул регуляризованного следа для соответствующих операторов. Для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением $-y''(x) + q(x)y(x)$ и самосопряженными краевыми условиями в пространстве $L_2[a, b]$, с непрерывно дифференцируемым потенциалом существенные результаты были получены И.М. Гельфандом, Б.М. Левитаном в 1953 году. Сравнительно недавно в работах А.А. Шкаликова, А.М. Савчука были впервые получены асимптотика собственных значений, собственных функций и формула регуляризованного следа для операторов Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с сингулярными потенциалами, не являю-

[1]Авторы искренне благодарят профессора К.А. Мирзоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Н.Н. Конечная и Т.А. Сафонова проводили исследование при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-31136-мол а) и Регионального общественного фонда содействия отечественной науке (грант по фундаментальным проблемам физики и математики). Т.А. Сафоновой также получена поддержка Минобрнауки РФ (грант Президента РФ № МК-3941.2015.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00349, 15-31-50259), правительства Архангельской области (конкурс «Молодые ученые Поморья», научный проект № 10-2015-03а «Качественный анализ дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами и смежные вопросы спектральной теории операторов»).

щимися локально интегрируемыми функциями, и краевыми условиями Дирихле. При этом применялось определение оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением первого порядка как оператора, порожденного квазидифференциальным выражением второго порядка с локально суммируемыми коэффициентами, впервые рассмотренное в работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова. Такой подход позволил нам в данной работе исследовать асимптотическое поведение собственных значений и получить формулы регуляризованного следа первого порядка для операторов, порожденных выражением $-y''(x) + h\delta(x)y(x)$, где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака, $h \in R$, и некоторыми самосопряженными краевыми условиями в пространстве $L_2[-1, 1]$, а именно условиями вида: *i*) $y(-1) = y(1) = 0$; *ii*) $y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1) = 0$; *iii*) $y(-1) = y^{[1]}(1) = 0$; *iv*) $y(-1) = y(1)$, $y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1)$. Для нахождения асимптотики собственных значений указанных операторов найдены соответствующие трансцендентные уравнения. Дальнейший анализ полученных уравнений позволяет получить формулы регуляризованного следа первого порядка рассмотренных операторов.

Ключевые слова: *квазидифференциальные операторы, оператор Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом, асимптотика собственных значений, регуляризованный след оператора.*

1. Пусть вещественная функция $\sigma(x)$ измерима на отрезке $[-1, 1]$ и $\sigma^2(x) \in L_1[-1, 1]$. Пусть далее $y(x)$ – абсолютно непрерывная функция на $[-1, 1]$ ($y(x) \in AC\,[-1, 1]$). Определим первую квазипроизводную функции y, полагая $y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x)$. Предположив, что $y^{[1]}(x) \in AC[-1, 1]$, определим вторую квазипроизводную $y(x)$, полагая $y^{[2]}(x) := (y^{[1]}(x))' + \sigma(x)y^{[1]}(x) + \sigma^2(x)y(x)$, и рассмотрим квазидифференциальное выражение

$$l[y](x) := -y^{[2]}(x),\ x \in [-1, 1]. \tag{1}$$

В [1, 2] показано, что (1) определяет симметрическое в смысле Лагранжа (формально самосопряженное) дифференциальное выражение

$$l[y](x) = -y''(x) + \sigma'(x)y(x), \tag{2}$$

где всюду производные означают производные в смысле теории распределений. В этих же работах установлено, что $l[y]$ порождает максимальный оператор L_M по формуле $L_M[y] = = l[y]$ с областью определения

$$D(L_M) = \left\{\ y\ \middle|\ y, y^{[1]} \in AC[-1,1], y^{[2]} \in L_2[-1,1]\right\}$$

и минимальный оператор L_m, определяемый как сужение L_M на область

$$D(L_m) = \{y \mid y \in D(L_M), y(\pm 1) = y^{[1]}(\pm 1) = 0\}.$$

Справедлива теорема [1, 3]:

Теорема 1.1. *Оператор L_m является замкнутым симметрическим оператором с индексом дефекта (2, 2). Всякое самосопряженное расширение L оператора L_m определяется линейно независимыми краевыми условиями вида:*

$$a_{j1}\,y(-1) + a_{j2}\,y^{[1]}(-1) + b_{j1}\,y(1) + b_{j2}\,y^{[1]}(1) = 0,\quad j = 1, 2, \tag{3}$$

причем

$$AJA^* = BJB^*, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ и } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратно, всякие линейно независимые краевые условия (3), удовлетворяющие (4), определяют самосопряженное расширение L оператора L_m.

Из вышесказанного следует, что операторы, порожденные (2) в пространстве $L_2[-1, 1]$, являются регулярными дифференциальными операторами. И, в частности, резольвента любого самосопряженного расширения L оператора L_m является интегральным оператором с ядром Гильберта–Шмидта, а спектр любого самосопряженного расширения L оператора L_m является вещественным и чисто дискретным.

Пусть теперь функция $\sigma(x)$ задана следующим образом:

$$\sigma(x)=\begin{cases}0, \text{ если } -1\le x<0,\\ h, \text{ если } 0\le x\le 1,\end{cases}$$

где $h \in R$. Тогда дифференциальное выражение (2) принимает вид:

$$l[y](x) = -y''(x) + h\delta(x)y(x),\ x \in [-1, 1], \quad (5)$$

где $\delta(x)$ – δ – функция Дирака.

Данная работа посвящена нахождению асимптотических формул для собственных значений и регуляризованного следа первого порядка самосопряженных расширений оператора L_m, порожденных выражением (5) и некоторыми краевыми условиями, удовлетворяющими равенствам (3) и (4), а именно условиями вида:

i) $y(-1) = y(1) = 0$;
ii) $y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1) = 0$;
iii) $y(-1) = y^{[1]}(1)=0$;
iv) $y(-1) = y(1),\ y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1)$.

Подчеркнем, что условия *i*)–*iii*) являются разделенными краевыми условиями, и поэтому собственные значения соответствующих операторов простые. Условие *iv*) – это аналог периодических краевых условий, и собственные значения в этом случае двукратные (кроме первого).

Отметим, что в работах [1, 2] впервые были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями σ' и краевыми условиями Дирихле на $[a, b]$, т. е. условиями вида *i*). В работе [4] найдена формула регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением $-y''(x)+\delta(x-\frac{\pi}{2})y(x)$ и краевыми условиями Дирихле в $L_2[0, \pi]$. В работе [5] найдена формула регуляризованного следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, не являющимися локально интегрируемыми функциями, и краевыми условиями Дирихле в $L_2[0, \pi]$.

2. Для нахождения асимптотики собственных значений указанных операторов составим для них трансцендентные уравнения. Рассмотрим уравнение на собственные значения

$$-y''(x) + h\delta(x)y(x) = \lambda y, \quad (6)$$

где $\lambda = z^2$ – спектральный параметр.

Лемма 2.1. *Общее решение дифференциального уравнения (6) можно представить в виде:*

$$y(x)=\begin{cases}c_1\cos zx + c_2\dfrac{\sin zx}{z}, \text{если } x\in[-1,0);\\ \tilde c_1\cos zx+\tilde c_2\dfrac{\sin zx}{z}, \text{если } x\in(0,1],\end{cases} \quad (7)$$

причем для коэффициентов $\tilde c_1, c_1$, $\tilde c_2, c_2$ справедливы равенства

$$\tilde c_1 = c_1;\quad \tilde c_2 = c_2 + hc_1. \quad (8)$$

Доказательство. Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (6) следует, что $y, y^{[1]} \in AC\,[-1, 1]$. Поэтому для произвольного решения уравнения (6) справедливы равенства:

$$y(0 + 0) = y(0 - 0);\ y^{[1]}(0 + 0) = y^{[1]}(0 - 0). \quad (9)$$

С другой стороны, уравнение (6) на промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ имеет вид $y''(x) = -z^2y$. Составим соответствующее характеристическое уравнение $k^2 = -z^2$. Пусть $\lambda > 0$, т. е. $z=\sqrt{\lambda}\in R$, тогда характеристическое уравнение имеет различные комплексные корни $k_1=i\sqrt{\lambda}=iz$, $k_1=-i\sqrt{\lambda}=-iz$. Поэтому общее решение уравнения (6) на промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ имеет вид $y(x)=c_1\cos zx+c_2\dfrac{\sin zx}{z}$ и $y(x)=\tilde c_1\cos zx+\tilde c_2\dfrac{\sin zx}{z}$ соответственно, т. е. справедливы формулы (7). Подставив эти представления в (9), получим, что справедливы равенства (8).

Пусть теперь $\lambda < 0$, т. е. $z=i\sqrt{-\lambda}\in C$, тогда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни $k_1=\sqrt{-\lambda}=-iz$ $k_1=-\sqrt{-\lambda}=iz$. Поэтому общее решение уравнения (6) на промежутках [–1, 0) и (0, 1] имеет вид $y(x) = c_1\exp(izx) + c_2\exp(-izx)$ и $y(x)=\tilde c_1\exp(izx)+\tilde c_2\exp(-izx)$ соответственно. Положив $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ и $c_1 = \frac{1}{2iz}, c_2 = -\frac{1}{2iz}$, получим на промежутке [–1, 0) два линейно независимых решения $\cos zx$ и $\frac{\sin zx}{z}$. Аналогично и на промежутке (0, 1]. Следовательно, для общего решения уравнения (6) остаются справедливы формулы (7) и (8).

В случае $\lambda = 0$ формулы (7) и (8) справедливы как предельный случай равенств (7) при $z \to 0$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. В случае $\lambda < 0$ положим $z = iz_1$, $z_1 \in R$, тогда формулы (7) примут вид:

$$y(x)=\begin{cases} c_1 ch z_1 x + c_2\dfrac{sh z_1 x}{z_1}, \text{если } x\in[-1,0);\\ \tilde c_1 ch z_1 x + \tilde c_2\dfrac{sh z_1 x}{z_1}, \text{если } x\in(0,1]. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2.1. *Трансцендентные уравнения для собственных значений операторов, порожденных дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями i) – iv), имеют вид:*

$i)$ $\sin z(2\cos z+\frac{h}{z}\sin z)=0;$

$ii)$ $\sin z(h\sin z-(2z+\frac{h^2}{z})\cos z)=0;$

$iii)$ $\cos 2z-\frac{h}{2z}\sin 2z-\frac{h^2}{z^2}\sin^2 z=0;$

$iv)$ $(4+\frac{h^2}{z^2})\sin^2 z=0.$

Доказательство. Докажем справедливость теоремы для случая *i*). В силу леммы 2.1 для общего решения уравнения (6) справедливы равенства (7) и (8). Граничные условия *i*) будут выполнены, если c_1, c_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} c_1\cos z - c_2\dfrac{\sin z}{z}=0;\\ c_1(\cos z+h\dfrac{\sin z}{z})+c_2\dfrac{\sin z}{z}=0. \end{cases}$$

Данная система имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю, т. е. $\sin z(2\cos z+\frac{h}{z}\sin z)=0.$ Аналогично можно доказать и остальные утверждения теоремы. Теорема доказана.

Замечание 2.2. В случае $\lambda < 0$ снова сделаем замену $z = iz_1$, $z_1 \in R$, тогда соответствующие трансцендентные уравнения примут вид:

$i)$ $shz_1(2chz_1+\frac{h}{z_1}shz_1)=0;$

$ii)$ $shz_1(hshz_1+(-2z_1+\frac{h^2}{z_1})chz_1)=0;$

$iii)$ $ch2z_1-\frac{h}{2z_1}sh2z_1-\frac{h^2}{z_1^2}sh^2 z_1=0;$

$iv)$ $(4-\frac{h^2}{z_1^2})sh^2 z_1=0.$

Замечание 2.3. Число $\lambda = 0$ является собственным значением рассматриваемых операторов при выполнении следующих равенств:

$i)$ $h + 2 = 0$; $ii)$ $h = 0$;
$iii)$ $h^2 + h - 1 = 0$; $iv)$ $h = 0$.

3. Исследуем асимптотику собственных значений операторов, порожденных дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями *i*)–*iv*).

Теорема 3.1. *Собственные значения оператора, порожденного дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями i), имеют следующую асимптотику:*

$$\lambda_n=\frac{\pi^2 n^2}{4}+\frac{h}{2}-(-1)^n\frac{h}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n\to+\infty.$$

Доказательство. Пусть $\lambda>0$, т. е. $z=\sqrt{\lambda}>0$ Согласно теореме 2.1 трансцендентное уравнение для собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид

$$\sin z(2\cos z+\frac{h}{z}\sin z)=0.$$

Следовательно, $\sin z = 0$ или

$$2\cos z+\frac{h}{z}\sin z=0. \tag{11}$$

Из уравнения $\sin z = 0$ находим, что $z_m = \pi m$, $m = 1, 2, \dots$.

Решая уравнение (11) непосредственно, найдем, что его решения можно записать в виде

$$z_n = \pi n - \frac{\pi}{2} + \alpha_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $|\alpha_n| < C$, $C = \text{const}$, и $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Подставив в уравнение (11) найденное решение z_n, получим:

$$\sin\alpha_n = \frac{h}{2\pi n}\frac{1}{1-\dfrac{\pi-2\alpha_n}{2\pi n}}\cos\alpha_n.$$

Выражение $\dfrac{1}{1-\dfrac{\pi-2\alpha_n}{2\pi n}}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и со знаменателем, равным $\dfrac{\pi-2\alpha_n}{2\pi n}$. Поэтому $\sin\alpha_n = \dfrac{h}{2\pi n}\cos\alpha_n + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Так как $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то в силу первого замечательного предела

$$\alpha_n = \frac{h}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и, следовательно,

$$z_n = \pi n - \frac{\pi}{2} + \frac{h}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, общее решение для z_n и z_m имеет вид:

$$z_k = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{h}{2\pi k} - (-1)^{k-1}\frac{h}{2\pi k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$k = 2, 3, \ldots$.

Учитывая замену $\lambda = z^2$, получим следующую асимптотику положительных собственных значений соответствующего оператора:

$$\lambda_k = \frac{\pi^2(k-1)^2}{4} + \frac{h}{2} - (-1)^{k-1}\frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \ k = 2, 3, \ldots .$$

Заменив $n = k - 1$, получим окончательные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{4} + \frac{h}{2} - (-1)^n\frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Согласно замечанию 2.2, трансцендентное уравнение для отрицательных собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид $shz_1(2chz_1 + \dfrac{h}{z_1}shz_1) = 0$ $z_1 \in R$. Данное уравнение не имеет отличных от нуля корней. Следовательно, оператор не имеет отрицательных собственных значений.

Из замечания 2.3 следует, что число $\lambda = 0$ является собственным значением соответствующего оператора только при $h = -2$. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Собственные значения оператора, порожденного дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями ii), имеют следующую асимптотику:*

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} - \frac{h}{2} + (-1)^n\frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Согласно теореме 2.1 трансцендентное уравнение для собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид $\sin z(h\sin z - (2z + \dfrac{h^2}{z})\cos z) = 0$.

Следовательно, $\sin z = 0$ или

$$h\sin z - (2z + \frac{h^2}{z})\cos z = 0. \tag{12}$$

Из первого уравнения находим, что $z_m = \pi m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Решая уравнение (12) непосредственно, получим, что его решения можно записать в виде:

$$z_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \alpha_n, \ n = 0, 1, \ldots,$$

где $|\alpha_n| < C$, $C = const$, и $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Подставив в уравнение (12) найденное решение z_n, получим:

$$\sin\alpha_n = \frac{h}{2}\cdot\frac{\pi n + \frac{\pi}{2}}{\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2}\cdot\frac{1-\dfrac{2\alpha_n}{2\pi n+\pi}}{\left(1-\dfrac{2\alpha_n}{2\pi n+\pi}\right)^2 + \dfrac{2h^2}{(2\pi n+\pi)^2}}\cos\alpha_n.$$

Рассуждая так же, как и в теореме 3.1, определим, что

$$\alpha_n = \frac{h}{2\pi n + \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и, следовательно,

$$z_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{h}{2\pi n + \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n = 0,\ 1,\ \dots .$$

Таким образом, общее решение для z_n и z_m имеет вид:

$$z_k = \frac{\pi k}{2} - \frac{h}{2\pi k} + (-1)^k \frac{h}{2\pi k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),\ k = 1,\ 2,\ \dots .$$

Учитывая замену $\lambda = z^2$, получим следующую асимптотику положительных собственных значений:

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{4} - \frac{h}{2} + (-1)^k \frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right),\ k = 1,\ 2,\ \dots .$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Согласно замечанию 2.2 трансцендентное уравнение для отрицательных собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид

$$shz_1(hshz_1 + (-2z_1 + \frac{h^2}{z_1})chz_1) = 0\ ,\ z_1 \in R.$$

Данное уравнение не имеет отличных от нуля корней. Следовательно, оператор не имеет отрицательных собственных значений.

Из замечания 2.3 следует, что число $\lambda = 0$ является собственным значением соответствующего оператора только при $h = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Собственные значения оператора, порожденного дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями iii), имеют следующую асимптотику:*

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{2} + n)^2 - \frac{h}{2} + O(\frac{1}{n}) \text{ при } n \to +\infty .$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Согласно теореме 2.1 трансцендентное уравнение для собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид:

$$\cos 2z - \frac{h}{2z}\sin 2z - \frac{h^2}{z^2}\sin^2 z = 0 . \qquad (13)$$

Решая уравнение (13) непосредственно, получим, что его решения можно записать в виде:

$$z_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \alpha_n\ ,\quad n = 1, 2, \dots,$$

где $|\alpha_n| < C$, $C = const$, и $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Подставив в уравнение (13) найденное решение z_n, получим:

$$\sin 2\alpha_n = \frac{2h}{2\pi n + \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot$$

В силу первого замечательного предела

$$\alpha_n = \frac{h}{2\pi n + \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и, следовательно,

$$z_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \frac{h}{2\pi n + \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot$$

Учитывая замену $\lambda = z^2$, получим следующую асимптотику собственных значений:

$$\lambda_k = \frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{2} + n)^2 - \frac{h}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n = 1, 2 \dots$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Согласно замечанию 2.2, трансцендентное уравнение для отрицательных собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид:

$$ch2z_1 - \frac{h}{2z_1}sh2z_1 - \frac{h^2}{z_1^2}sh^2 z_1 = 0\ ,\ z_1 \in R\ \cdot$$

Данное уравнение не имеет решений. Следовательно, соответствующий оператор не имеет отрицательных собственных значений.

Из замечания 2.3 следует, что $\lambda = 0$ является собственным значением соответствующего оператора только при $h = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Собственные значения оператора, порожденного дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями iv), имеют вид:*

$$\lambda_0 = -\frac{h^2}{4}\ ,\quad \lambda_n = \pi^2 n^2,\ n = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Согласно теореме 2.1 трансцендентное уравнение для собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид $(4 + \frac{h^2}{z^2})\sin^2 z = 0$. Следовательно, $4 + \frac{h^2}{z^2} = 0$ или $\sin^2 z = 0$. Учитывая замену $\lambda = z^2$, получим следующие формулы для положительных собственных значений оператора:

$$\lambda_n = \pi^2 n^2,\ n = 1,\ 2,\ \dots .$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Согласно замечанию 2.2 трансцендентное уравнение для отрицательных собственных значений рассматриваемого оператора имеет вид:

$$(4-\frac{h^2}{z_1^2})sh^2 z_1 = 0\,,\ z_1 \in R\,.$$

Следовательно, оператор имеет единственное отрицательное собственное значение

$$\lambda_0 = -\frac{h^2}{4}\cdot$$

Из замечания 2.3 следует, что число $\lambda = 0$ является собственным значением соответствующего оператора только при $h = 0$. Теорема доказана.

4. Под регуляризованным следом первого порядка операторов, порожденных дифференциальным выражением (5) и краевыми условиями *i*)–*iv*), будем понимать суммы соответствующих рядов:

$$i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{4} - \frac{h}{2} + (-1)^n\frac{h}{2}\right); \tag{14}$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{4} + \frac{h}{2} - (-1)^n\frac{h}{2}\right); \tag{15}$$

$$iii)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 + \frac{h}{2}\right); \tag{16}$$

$$iv)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lambda_n - \pi^2 n^2\right). \tag{17}$$

Отметим, что при тех значениях параметра h, при которых $\lambda = 0$ является собственным значением, суммирование надо начинать с 0. Очевидно, что в случае *iv*) ряд (17) сходится и его сумма равна нулю.

Теорема 4.1. *Пусть L – оператор, порожденный (5) и краевыми условиями i). Тогда ряд (14) сходится и его сумма равна* $-\dfrac{h^2}{8}$.

Доказательство. Числа z_n (см. теорему 3.1) являются положительными корнями функции $f(z) = \sin 2z(1+\frac{h}{2z}tgz)$. Обозначим через γ_n окружности на комплексной плоскости с центрами в начале координат и радиусами, равными $\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}$. Отметим, что $f(z)$ нечетна, функция $\frac{h}{2z}tgz$ ограничена на γ_n некоторым числом, не зависящим от *n*, а функция $\ln(1+\frac{h}{2z}tgz)$ голоморфна на γ_n при больших значениях *n*. В силу теоремы Коши о вычетах получим:

$$2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln(\sin 2z)) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln(1+\frac{h}{2z}tgz)) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} 2z(\frac{h}{2z}tgz - \frac{h^2}{8z^2}tg^2 z)dz + o(1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} htgzdz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h^2}{4}\frac{tg^2 z}{z}dz + o(1) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - h\sum_{|z|<\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}} restgz +$$

$$+\frac{h^2}{4}\sum_{|z|<\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}} res\frac{tg^2 z}{z} + o(1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} + 2h\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)' - \frac{2h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)' + o(1),$$

где штрих означает суммирование по всем нечетным числам, меньшим *n*.

Заметив, что $\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-(-1)^k)$, получим равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \frac{\pi^2k^2}{4} - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}(-1)^k\right) = -\frac{h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)' + o(1).$$

При $n \to +\infty$ сумма $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)'$ стремится к $\frac{\pi^2}{8}$, поэтому ряд (14) сходится и его сумма равна $-\frac{h^2}{8}$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть* L *– оператор, порожденный (5) и краевыми условиями ii). Тогда ряд (15) сходится и его сумма равна* $-\frac{5h^2}{8}$.

Доказательство. Числа z_n (см. теорему 3.2) являются положительными корнями

$$f(z) = -z\sin 2z(1+(\frac{h^2}{2z^2}-\frac{h}{2z}tgz)) \cdot$$

Обозначим через γ_n окружности на комплексной плоскости с центрами в начале координат и радиусами, равными $\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}$. Отметим, что $f(z)$ четная, функция $\frac{h^2}{2z^2}-\frac{h}{2z}tgz$ ограничена на γ_n некоторым числом, не зависящим от n, а функция $\ln(1+(\frac{h^2}{2z^2}-\frac{h}{2z}tgz))$ голоморфна на γ_n при больших n. Применяя теорему Коши о вычетах, получим:

$$2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln(-z)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln\sin 2z) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln(1+(\frac{h^2}{2z^2}-\frac{h}{2z}tgz))) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} 2z\ln(1+(\frac{h^2}{2z^2}-\frac{h}{2z}tgz))dz =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h^2}{z}dz + \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\gamma_n} htgzdz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h^2}{4}\frac{tg^2 z}{z}dz + o(1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2}{4} - h^2 - 2h\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)' - \frac{2h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)' + o(1),$$

где штрих, как и прежде, означает суммирование по всем нечетным числам, меньшим n.

Следовательно, справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \frac{\pi^2k^2}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}(-1)^k\right) =$$

$$= -\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)' + o(1).$$

Таким образом, ряд (15) сходится и его сумма равна $-\frac{5h^2}{8}$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть* L *– оператор, порожденный (5) и краевыми условиями iii). Тогда ряд (16) сходится и его сумма равна* $-\frac{3h^2}{8}$.

Доказательство. Числа z_n (см. теорему 3.3) являются положительными корнями $f(z) = \cos 2z(1+(-\frac{h}{2z}tg2z - \frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}))$. Обозначим через γ_n окружности на комплексной плоскости с центрами в начале координат и радиусами, равными $\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}$. Отметим, что $f(z)$ четная, функция $-\frac{h}{2z}tg2z-\frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}$ ограничена на γ_n некоторым числом, не зависящим от n, а функция $\ln(1+(-\frac{h}{2z}tg2z-\frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}))$ голоморфна на γ_n при больших n. В силу теоремы Коши о вычетах получим:

$$2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln\cos 2z) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} z^2 d(\ln(1+(-\frac{h}{2z}tg2z-\frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}))) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{2}+k)^2 - \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\gamma_n} 2z((-\frac{h}{2z}tg2z-\frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}) - \frac{1}{2}(\frac{h}{2z}tg2z+\frac{h^2}{z^2}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z})^2)dz + o(1) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{2}+k)^2 + \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\gamma_n} htg2zdz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h^2}{4}\frac{tg^2 2z}{z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{2h^2}{z}\frac{\sin^2 z}{\cos 2z}dz +$$

$$+ o(1) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{4}(\frac{1}{2}+k)^2 - h - \frac{2h^2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} -$$

$$-\frac{2h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)' + o(1).$$

Следовательно, справедливо равенство:

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\lambda_k-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}+k\right)^2+\frac{h}{2}\right)=$$

$$=-\frac{h^2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{h^2}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)'+o(1).$$

При $n \to +\infty$ сумма $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ стремится к $\frac{\pi}{4}$.

Таким образом, ряд (16) сходится и его сумма равна $-\frac{3h^2}{8}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математ. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 847–912.

2. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.

3. *Мирзоев К.А.* Операторы Штурма–Лиувилля // Тр. ММО. 2014. Т. 75, вып. 2. С. 335–359.

4. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Успехи математ. наук. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.

5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математ. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.

References

1. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s singulyarnymi po-tentsialami [Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1999, vol. 66, no. 3, pp. 847–912.

2. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma–Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami [Sturm-Liouville Operators with Distributional Potentials]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 2003, vol. 64, pp. 159–212.

3. Mirzoev K.A. Operatory Shturma–Liuvillya [Sturm-Liouville Operators]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 335–359.

4. Savchuk A.M. Regulyarizovannyy sled pervogo poryadka operatora Shturma–Liuvillya s δ-potentsialom [Regularized Trace of the First-Order Sturm-Liouville Operator with δ-Potential]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2000, vol. 55, no. 6, pp. 155–156.

5. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Formula sleda dlya operatorov Shturma–Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Trace Formula for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, vol. 69, no. 3, pp. 427–442.

doi: 10.17238/issn2227-6572.2016.1.104

Konechnaya Natal'ya Nikolaevna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Uritskiy str., 68, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation;
e-mail: n.konechnaya@narfu.ru

Safonova Tat'yana Anatol'evna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation;
e-mail: t.Safonova@narfu.ru
Tagirova Rena Nasirovna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Naberezhnaya Severnoy Dviny, 17, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation;
e-mail: tagirova_rena@mail.ru

ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES AND REGULARIZED TRACE OF THE FIRST-ORDER STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH δ-POTENTIAL

One of the interesting problems of the spectral theory of operators is the study of asymptotic behavior of the distribution function for the large values of the spectral parameter λ. A particular case of this problem is to study the asymptotics of the eigenvalues, eigenfunctions depending on the properties of the coefficients of differential expressions and to obtain the formulas of regularized trace for the corresponding operators. The significant results for the differential Sturm-Liouville operator generated by the expression $-y''(x) + q(x)y(x)$ and self-adjoint boundary conditions in space $L_2[a, b]$, with a continuously differentiable potential were obtained by I.M. Gelfand, B.M. Levitan in 1953. More recently, A.A. Shkalikov, A.M. Savchuk in their papers first obtained the asymptotics of the eigenvalues, eigenfunctions and the formula of the regularized trace for the Sturm-Liouville operators on a finite interval with singular potentials that are not locally integrable functions, and Dirichlet boundary conditions. At the same time, the definition of the Sturm-Liouville operator with the first order distribution potential as an operator generated by the quasi-differential second order expression with locally summable coefficients first presented in the papers of A.A. Shkalikov and A.M. Savchuk was applied. This approach allowed us to investigate in this paper the asymptotic behavior of the eigenvalues and obtain the formulas of the first order regularized trace for the operators generated by the expression $-y''(x) + h\delta(x)y(x)$, where $\delta(x)$ – δ – Dirac delta function, $h \in R$, and some self-adjoint boundary conditions in space $L_2[-1, 1]$, namely by the conditions of the type: *i*) $y(-1) = y(1) = 0$; *ii*) $y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1) = 0$; *iii*) $y(-1) = y^{[1]}(1) = 0$; *iv*) $y(-1) = y(1)$, $y^{[1]}(-1) = y^{[1]}(1)$. The corresponding transcendental equations were established to get the asymptotics of the eigenvalues of these operators. Further analysis of the equations allows us to obtain the formulas of the first order regularized trace for these operators.

Keywords: *quasi-differential operators, Sturm-Liouville operator with δ-potential, asymptotics of the eigenvalues, regularized trace of the operator.*