

УДК 515.16

СТАРОСТИНА Вера Валерьевна, аспирант кафедры математического анализа института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова

ТЕПЛЯКОВ Вячеслав Васильевич, доцент кафедры методики преподавания математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 11 научных публикаций, в т. ч. одного учебного пособия

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ШАРКОВСКОГО

В статье приводится схема построения примеров, показывающих, что для любого натурального числа p существует непрерывное отображение $f: I \rightarrow I$, которое имеет период p и не имеет периодов, предшествующих этому p в порядке Шарковского.

Ключевые слова: Орбита, период, цикл, порядок Шарковского, удвоение периода.

Советский математик А.Н. Шарковский в 1964 году обнаружил удивительное явление в одномерной динамике, связанное со взаимоотношениями длин орбит периодических точек [2]. Оказалось, например, что наличие орбиты длины 3 неизбежно влечет существование орбит всех остальных длин, а наличие орбиты длины 4 гарантирует только существование орбит длины 2 и 1, появление орбиты длины 6 влечет наличие орбиты любой четной длины и т. д.

В нашей работе мы, в частности, показываем, что существуют отображения с орбитами длины 6, не имеющие никаких орбит нечетной длины.

Теперь перейдем к точным формулировкам. Пусть имеется непрерывное отображение $f: I \rightarrow I$, где $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый отрезок. Орбитой точки $x_0 \in I$ называется множество $O(x_0) = \{f^n(x_0) \mid n = 1, 2, \dots\}$, где $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$. Точка

x_0 называется периодической, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(x_0) = x_0$. Наименьшее такое n называется периодом точки x_0 , т. е. период точки – это длина ее орбиты (или количество точек в орбите). Конечную орбиту называют еще циклом. Формулировка теоремы Шарковского становится наиболее выразительной, если ввести новый порядок в множестве натуральных чисел, отличный от стандартного. Этот новый линейный порядок в $\mathbb{N}$ отражает найденную Шарковским зависимость между длинами орбит точек и называется порядком Шарковского:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 3 & \triangleright & 5 & \triangleright & 7 & \triangleright & 9 & \triangleright & \dots & \triangleright & 2k+1 & \triangleright & \dots \\ \dots & \triangleright & 2 \cdot 3 & \triangleright & 2 \cdot 5 & \triangleright & 2 \cdot 7 & \triangleright & 2 \cdot 9 & \triangleright & \dots & \triangleright & 2 \cdot (2k+1) & \triangleright & \dots \\ \dots & \triangleright & 2^2 \cdot 3 & \triangleright & 2^2 \cdot 5 & \triangleright & 2^2 \cdot 7 & \triangleright & \dots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \dots & \triangleright & 2^m \cdot 3 & \triangleright & 2^m \cdot 5 & \triangleright & \dots & & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \dots & \triangleright & 2^n & \triangleright & 2^{n-1} & \triangleright & \dots & \triangleright & 2^2 & \triangleright & 2^1 & \triangleright & 1, & & \end{array}$$

где $p \Rightarrow q$ читается как « q следует за p » или « p предшествует q ». Таким образом, в первой строке стоят все нечетные числа в указанном порядке, за ними следуют они же, умноженные на 2. Каждая следующая строчка получается из предыдущей умножением на 2. И, наконец, в последней строчке идут чистые степени двойки в убывающем порядке.

Теорема Шарковского. Пусть I – отрезок на числовой прямой, а $f: I \rightarrow I$ – непрерывное отображение. Если f имеет точку периода p и $p \leq q$, то найдется точка периода q .

С доказательством теоремы Шарковского можно познакомиться в недавно переведенной на русский язык монографии [1], но наиболее подробное и понятное доказательство изложено в дипломной работе В.В. Старостиной, с которым можно ознакомиться на кафедре алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова.

В нашей статье приводится схема построения примеров, показывающих, что для любого натурального числа p существует непрерывное отображение $f: I \rightarrow I$, которое имеет период p и не имеет периодов, предшествующих этому p в порядке Шарковского.

Пример 1

Построим непрерывное отображение $f: [1, 5] \rightarrow [1, 5]$, имеющее период 5, но не имеющее периода 3.

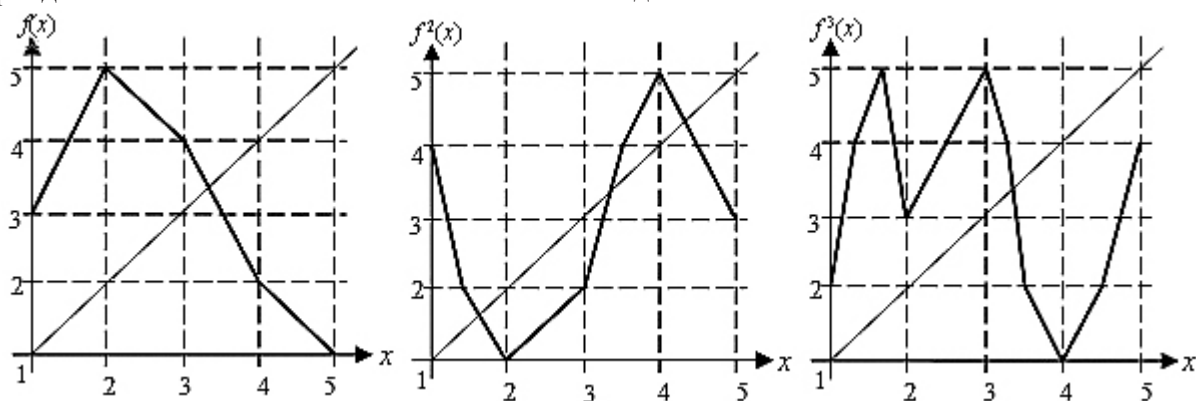


Рис. 1. Пример отображения, имеющего все периоды, кроме 3

Пусть f задано в точках 1, 2, 3, 4, 5 следующим образом:

$$f(1) = 3; f(2) = 5; f(3) = 4; f(4) = 2; f(5) = 1,$$

а на промежуточные отрезки распространено по линейности (рис. 1). Заметим, что орбита точки $x = 1$ имеет вид 1, 3, 4, 2, 5, 1, ..., т. е. f обладает периодом 5. Нарисуем графики f, f^2 и f^3 и покажем, что не существует орбиты периода 3 (рис. 1).

Получаем, что уравнению $f^3(x) = x$ удовлетворяет только неподвижная точка построенного отображения $f(x)$, значит, орбит длины 3 нет.

Пример 2

Построим непрерывное отображение $f: [1, 7] \rightarrow [1, 7]$, имеющее период 7, но не имеющее периода 5 и периода 3.

Пусть f задано в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 следующим образом:

$$f(1) = 4; f(2) = 7; f(3) = 6; f(4) = 5; f(5) = 3; f(6) = 2; f(7) = 1,$$

а на промежуточные отрезки распространено по линейности (рис. 2). Заметим, что орбита точки $x = 1$ имеет вид 1, 4, 5, 3, 6, 2, 7, 1, ..., т. е. f обладает периодом 7. Нарисуем графики f, f^3 и f^5 и покажем, что не существует орбиты периода 5 и орбиты периода 3 (рис. 2).

На последнем графике видно, что решением уравнения $f^5(x) = x$ является только неподвижная точка. Значит, точек предыдущих периодов нет.

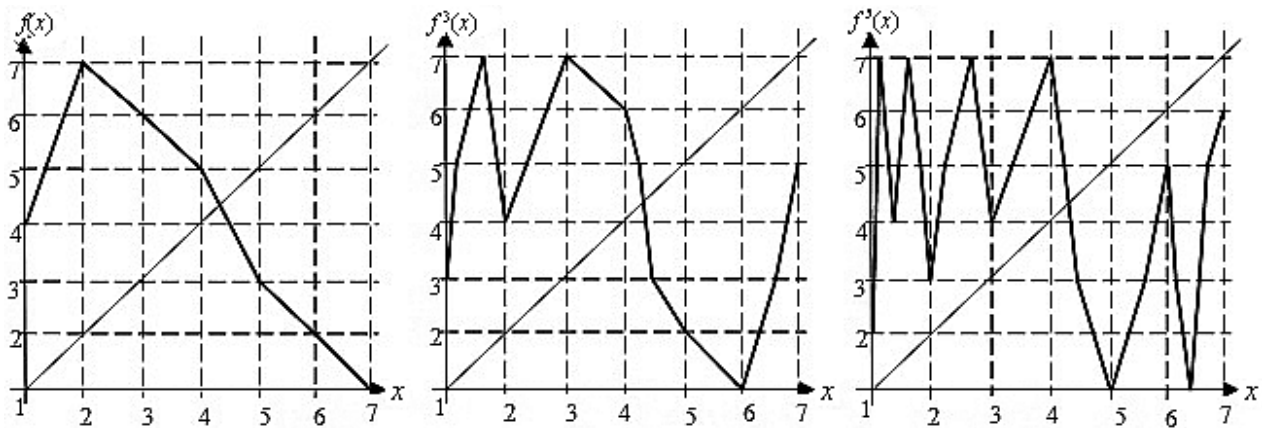


Рис. 2. Пример отображения, имеющего все периоды, кроме 3 и 5

Пример 3

Построим непрерывное отображение $f: [1, 9] \rightarrow [1, 9]$, имеющее период 9, но не имеющее периодов 7, 5 и 3.

Пусть f задано в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 следующим образом:

$$f(1) = 5; f(2) = 9; f(3) = 8; f(4) = 7; f(5) = 6; f(6) = 4; f(7) = 3; f(8) = 2; f(9) = 1,$$

а на промежуточные отрезки распространено по линейности (рис. 3). Заметим, что орбита точки $x = 1$ имеет вид 1, 5, 6, 4, 7, 3, 8, 2, 9, 1, ..., т. е. f обладает периодом 9. Нарисуем графики f, f^3, f^5 и f^7 и покажем, что не существует орбиты периода 7, орбиты периода 5 и орбиты периода 3 (рис. 3).

На последнем графике видно, что решением уравнения $f^7(x) = x$ является только непод-

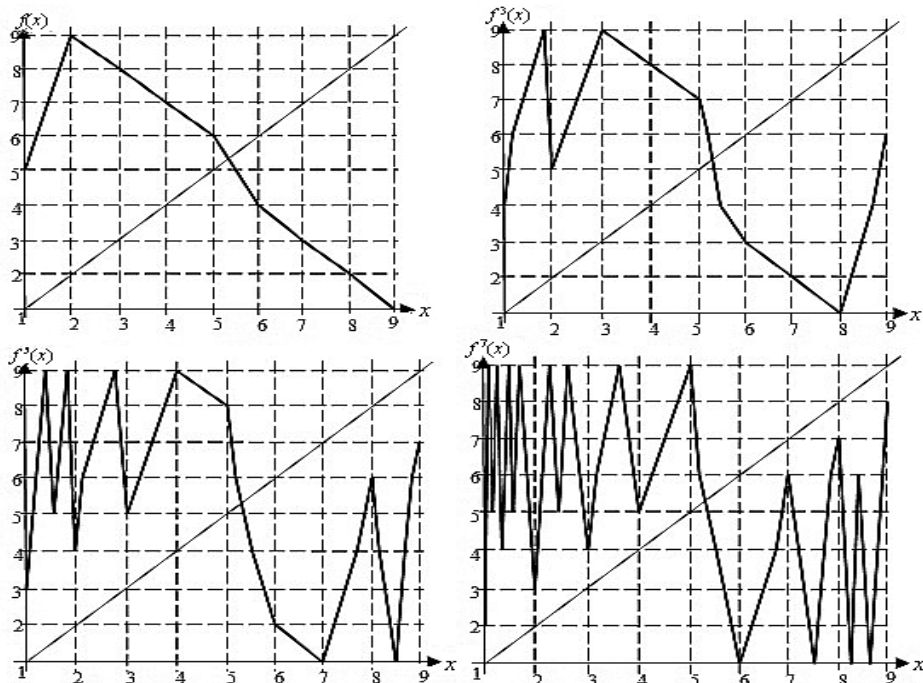


Рис. 3. Пример отображения, имеющего все периоды, кроме 3, 5 и 7

вижная точка. Значит, точек предыдущих периодов нет.

Напрашивается общая идея построения дальнейших примеров для первой строки порядка Шарковского: в целочисленных узлах f принимает значения согласно схеме (рис. 4), и определена как линейная функция на промежуточных точках.

Лемма

Для всякого непрерывного отображения $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ найдется непрерывное отображение $\lambda_{(f)}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, периоды которого равны удвоенным периодам отображения f и еще период 1.

Доказательство

Пусть задано произвольное непрерывное

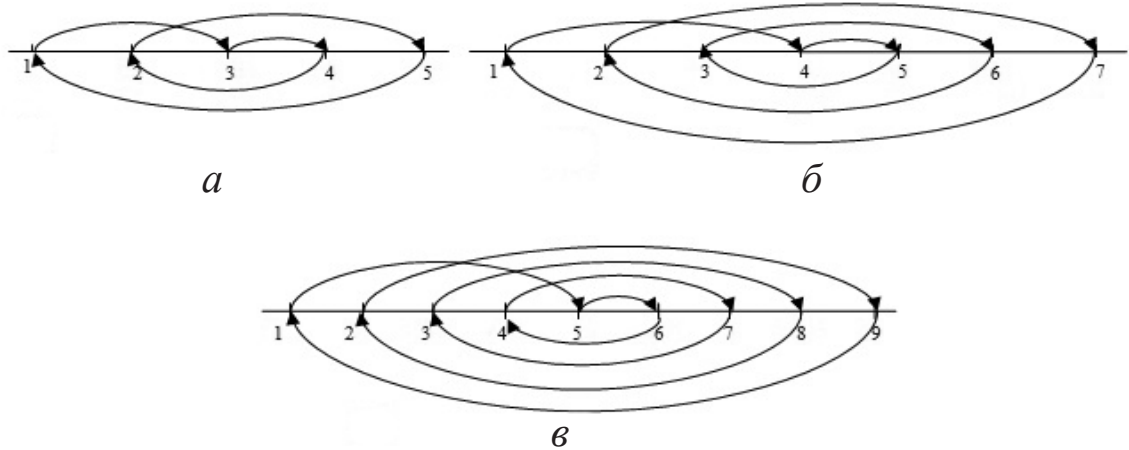


Рис. 4. Схема построения примеров для первой строки порядка Шарковского

Или, другими словами, чтобы построить непрерывное отображение $f: [1, p] \rightarrow [1, p]$, имеющее период $p = 2n + 1$, у которого нет всех периодов, предшествующих p , достаточно взять решетку $2n \times 2n$ и задать f на целочисленных точках следующим образом:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{p+1}{2}; f(2) = p; f(3) = p-1; f(4) = p-2; \dots; \\ f\left(\frac{p+1}{2}\right) &= \frac{p+3}{2}; f\left(\frac{p+3}{2}\right) = \frac{p-1}{2}; f\left(\frac{p+5}{2}\right) = \frac{p-3}{2}; \\ f\left(\frac{p+7}{2}\right) &= \frac{p-5}{2}; \dots; f\left(\frac{p+p}{2}\right) = f(p) = 1, \end{aligned}$$

а между этими точками отображение f распространено по линейности.

Теперь рассмотрим процедуру удвоения периода.

Под удвоением периода мы понимаем переход от отображения f к новому отображению $\tilde{f}$ (периоды которого – это в точности удвоенные периоды отображения f и еще период 1).

отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Зададим отображение $\tilde{f}$ следующей формулой:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{2 + f(3x)}{3}, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ x - \frac{2}{3}, & \text{если } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases} \quad (1)$$

и продолжим это отображение на отрезок $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ линейным образом (рис. 5). Пусть для наглядности отображение f имеет график, представленный на рис. 5а, тогда отображение $\tilde{f}$ имеет график, представленный на рис. 5б.

Покажем, что отображение $\tilde{f}$ на отрезках $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ имеет периодические точки, периоды которых равны удвоенным периодам точек отображения f , а на отрезке $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ периодических точек нет, кроме неподвижной.

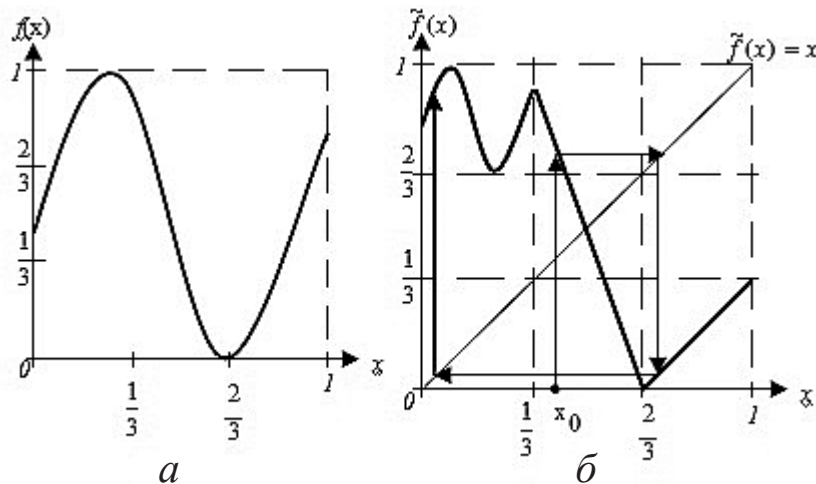


Рис. 5. Пример удвоения периода

Пусть $x_0 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, тогда $\tilde{f}(x) = \frac{2+f(3x)}{3}$ по формуле (1). Учитывая, что $\tilde{f}(x)$ принадлежит $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, то

$$\tilde{f}(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}\left(\frac{2+f(3x)}{3}\right) = \left(\frac{2+f(3x)}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{f(3x)}{3},$$

$$\text{т. е. } \tilde{f}^2(x) = \frac{f(3x)}{3}.$$

Сделав замену переменной, получим $\tilde{f}^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{3}$. Из этого равенства следует, что если у отображения f имеется орбита длины n , то у $\tilde{f}$ появляется орбита длины $2n$, расположенная на отрезках $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (см. лестницу Ламерея на рис. 5б).

Аналогично рассматривается случай, когда точка $x_0 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Наконец, если $x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, отображение $\tilde{f}$ не имеет других периодических точек, кроме единственной неподвижной. Это легко увидеть на рис. 5б: на лестнице Ламерея видно, что орбита любой точки $x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ не содержит дру-

гих точек отрезка $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (она состоит из точек отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ и самой точки x_0).

Таким образом, отображение $\tilde{f}$ удваивает периоды отображения f .

Пример 4

Построим непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, имеющее период 2, но не имеющее периода 4.

Пусть f задано в точках 0, 1 следующим образом:

$$f(0) = 1;$$

$$f(1) = 0;$$

и определено как линейная функция между этими точками.

Тогда отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ можно задать следующим образом: $f(x) = 1 - x$.

Заметим, что орбита точки $x = 1$ имеет вид 1, 0, 1, ..., т. е. f обладает периодом 2. Покажем, что не существует точки периода 4.

$$f^2(x) = 1 - (1 - x) = x,$$

таким образом, все точки отрезка $[0, 1]$ удовлетворяют уравнению $f^2(x) \equiv x$. Следовательно, все точки отрезка $[0, 1]$ имеют орбиту длиной не больше 2 (только у точки $x = \frac{1}{2}$ длина орбиты равна 1, т. к. $x = \frac{1}{2}$ — неподвижная точка отобра-

жения f). А это означает, что непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ не имеет периода 4.

Пример 5

Построим непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, имеющее период 4, но не имеющее периода 8. (Это будет означать, что нет и остальных периодов, предшествующих 8 в порядке Шарковского. Так как иначе, если бы отображение f имело бы какой-то из этих периодов, то, по теореме Шарковского, у f существовала бы периодическая точка периода 8).

Воспользуемся результатом примера 4, в котором было построено непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, заданное формулой $f(x) = 1 - x$, имеющее только период 2 (и период 1 у неподвижной точки), и применим опи-

санную выше в лемме процедуру удвоения периода к этому отображению:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{2 + (1 - 3x)}{3} = 1 - x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ x - \frac{2}{3}, & \text{если } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

и продолжим это отображение на отрезок $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ по линейности (рис. 6).

Построенные на этом рисунке графики отображений $\tilde{f}$, $\tilde{f}^2$, $\tilde{f}^3$, $\tilde{f}^4$ и $\tilde{f}^8$ позволяют сделать вывод, что уравнение $\tilde{f}^8(x) = x$ не имеет других решений, кроме тех, что и уравнение $\tilde{f}^4(x) = x$. Значит, орбит длины 8 нет, а потому нет орбит

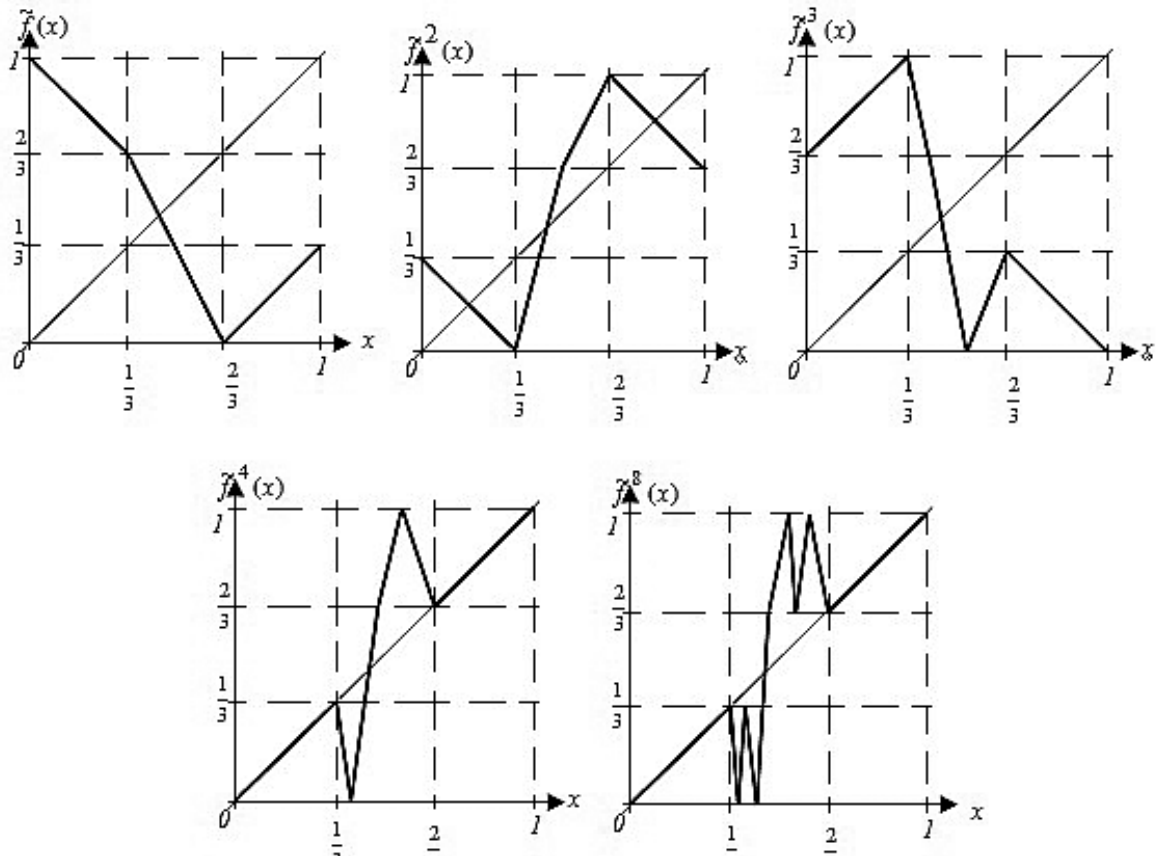


Рис. 6. Пример отображения, имеющего только периоды четыре, два и один

всех длин, предшествующих 8 в порядке Шарковского.

Таким образом, с помощью процедуры удвоения периода можно построить отображение, имеющее период 2^k и не имеющее всех предыдущих периодов.

Применяя данную процедуру, можно конструировать примеры отображений периодов для всех остальных строк со второй до предпоследней.

Приведем обещанный в начале статьи пример отображения, которое имеет орбиту длины 6 и не имеет никаких орбит нечетной длины. Для этого применим процедуру удвоения периода к отображению f , имеющему орбиту длины 3 (т. е. у f есть все периоды порядка Шарковского), в результате получим отображение f^2 , все орбиты которого имеют четную длину (и длину 6 в том числе), т. е. отображение f^2 не имеет орбит нечетной длины.

Аналогично, чтобы построить отображение, имеющее, например, период 14, у которого нет всех предыдущих периодов в порядке Шарковского, нужно применить процедуру удвоения периода к отображению f , построенному в примере 2 (у него есть период 7, но нет предшествующих периодов). В результате получается отображение f^2 имеющее период 14 и все следующие за ним в порядке Шарковского. Ясно, что f^2 не имеет периодов, предшествующих 14 в порядке Шарковского, в противном случае отображение f имело бы периоды, предшествующие 7, а это не так.

Полученная нами схема построения примеров позволяет сказать, что открытая А.Н. Шарковским зависимость между периодами непрерывных отображений является строгой в том смысле, что для любого натурального n существует отображение, имеющее период n и не имеющее предыдущих периодов.

Список литературы

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
2. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украин. математ. журн. 1964. Т. 16, вып. 1.

References

1. Katok A.B., Khasselblat B. *Vvedenie v sovremennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem* [Introduction to the Modern Dynamical Systems Theory]. Moscow, 1999.
2. Sharkovskiy A.N. *Sosushchestvovanie tsiklov nepreryvnogo otobrazheniya pryamoy v sebya* [Coexistence of Cycles of Continuous Mapping of a Line to Itself]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*, 1964, vol. 16, no. 1.

Starostina Vera Valeryevna

Postgraduate Student, Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

Teplakov Vyacheslav Vasilyevich

Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

AROUND SHARKOVSKY'S THEOREM

The paper demonstrates the way of constructing examples showing that for any natural p there exists a continuous map $f: I \rightarrow I$ that has a period p and does not have any periods preceding p in Sharkovsky sequence.

Keywords: *orbit, period, cycle, Sharkovsky sequence, period doubling.*

Контактная информация:

Старостина Вера Валерьевна

адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68;

e-mail: irrefragable@yandex.ru

Тепляков Вячеслав Васильевич

адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68;

e-mail: imikt@narfu.ru

Рецензент – *Андреев П.Д.*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова