УДК 514.112.4

ЯСТРЕБОВ Александр Васильевич*, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского. Автор 147 научных публикаций, в т. ч. трех монографий*

ШАБАНОВА Мария Валерьевна*, доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой экспериментальной математики и информатизации образования Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 140 научных публикаций, в т. ч. 4 монографий*

СРЕДНИЕ ЛИНИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ИЛИ КРАСИВОЕ БЕСПОЛЕЗНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Посвящается Т.М. Кориковой

Данная статья посвящена новым результатам, касающимся геометрии выпуклого четырехугольника. Если рассматривать математику как сумму знаний, то следует сказать, что авторами введены понятия «средняя линия выпуклого четырехугольника» и «середина n-го порядка выпуклого четырехугольника». Кроме того, доказана формула, выражающая площадь выпуклого четырехугольника через длины его средних линий и другие числовые характеристики. Особенность полученной формулы в том, что она связывает в единое целое 12 числовых характеристик, т. е. чрезвычайно много. Наконец, в статье сформулировано и экспериментально обосновано несколько гипотез о свойствах последовательности середин выпуклого четырехугольника. Тем самым намечено одно из возможных направлений исследования геометрии четырехугольника. Если рассматривать математику как сферу человеческой деятельности, то следует сказать, что в статье выявлена логика постановки и решения исследовательской задачи в выбранной области геометрии. По мнению авторов, для читателей представляет интерес и ценность именно демонстрация работы математика-теоретика и математика-экспериментатора. Тем самым статья возвращает читателя к экспериментальным корням математики. Если рассматривать методологию данного исследования, то следует сказать, что в нем использован комплекс дополняющих друг друга методов: соображения из области физики о деформациях фигур, сравнение различных математических формул с точки зрения их устойчивости относительно деформаций, метод теоретических обобщений, экспериментальные методы в области математики. Особо следует сказать о том, что гипотезы о свойствах выпуклого четырехугольника были получены в результате компьютерного эксперимента, проведенного в интерактивной геометрической среде «GeoGebra». Тем самым привлечение компьютеров порождает новые возможности исследования в такой, казалось бы, завершенной области, какой является элементарная геометрия.

Ключевые слова: *элементарная геометрия, выпуклый четырехугольник, обобщение, компьютерный эксперимент, динамическая модель.*

Постановка задачи и первое наблюдение. Хорошо известно, что площадь трапеции может быть вычислена по одной из двух формул. Как у каждого выпуклого четырехугольника, она равна половине произведения диагоналей, умноженной на синус угла между ними, а также произведению средней линии на высоту. Бросается в глаза полная разнотипность этих формул. Во-первых, их правые части не имеют ни одного общего элемента. Во-вторых, и это главное, формулы «по-разному реагируют» на вариации фигуры. Действительно, зафиксируем три вершины, а четвертую чуть-чуть «сдвинем» в направлении ее высоты. Под действием такой вариации первая формула останется справедливой, а вторая нет. При этом дело даже не в том, что два выражения окажутся неравны, а в том, что формула полностью утратит смысл, поскольку утратит смысл и понятие средней линии, и понятие высоты (они не определены для четырехугольника произвольного вида).

С точки зрения физики отмеченное обстоятельство является по меньшей мере неестественным. При малом смещении вершины – на миллиметр, микрон, ангстрем (единица длины, равная одной десятимиллиардной метра) – площадь фигуры также изменится на малую величину. При этом средняя линия превратится в другой отрезок, который хотя и не будет параллелен ни одной стороне четырехугольника, но будет мало отличаться от средней линии. В этой ситуации естественно поставить ряд вопросов, которые связаны друг с другом и, быть может, заменяют друг друга. Приведем три формулировки этих вопросов.

1. Как обобщить формулу площади трапеции на случай четырехугольника общего вида?

2. Какова формула площади четырехугольника общего вида, которая «превратится» в формулу площади трапеции при «превращении» четырехугольника в трапецию?

3. Какой геометрический образ играет в четырехугольнике общего вида ту же роль, которую играет в трапеции средняя линия?

Ответам на эти вопросы посвящена данная статья.

Частично ответ на третий вопрос подсказывает следующее наблюдение.

Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями $[BC]$ и $[AD]$ и средней линией $[PQ]$. Продолжим боковые стороны до их пересечения в точке F, проведем биссектрису $\angle AFD$ и рассмотрим отрезок $[RT]$ этой биссектрисы с концами на сторонах $[BC]$ и $[AD]$ (*рис. 1*). Проведем из точки R высоту $[RH]$. Очевидно, что площадь трапеции вычисляется по формуле:

$$S = |PQ|\cdot|RH| = |PQ|\cdot|RT|\sin\Theta.$$

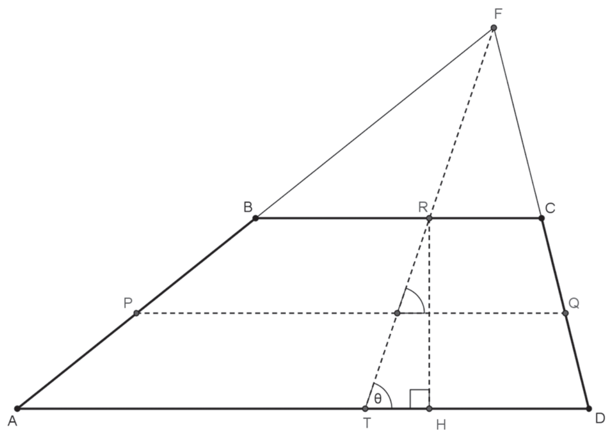

Рис 1. Иллюстрация к наводящим соображениям

Заметим, что каждая точка отрезка $[PQ]$ равноудалена от оснований трапеции или их продолжений, а каждая точка отрезка $[RT]$ равноудалена от боковых сторон трапеции или их продолжений. Таким образом, последняя формула показывает, что площадь трапеции является произведением длин двух отрезков, точки которых обладают неким специальным свойством, на синус угла между ними. При этом специальное свойство отрезков состоит в том, что каждая точка равноудалена от двух несмежных сторон. На этом наблюдении будет основано вводимое понятие, а с помощью этого понятия будет, в свою очередь, сформулирован основной результат.

Понятие средней линии и основной результат.

Определение 1. Средней линией выпуклого четырехугольника, соединяющей две его противоположные стороны, назовем множество точек внутри четырехугольника, равноудаленных от двух других его сторон или их продолжений.

Согласно введенному определению средняя линия, соединяющая стороны [*AB*] и [*CD*] выпуклого четырехугольника *ABCD*, строится по следующему алгоритму:

1) если [*BC*] параллельна [*AD*], то средняя линия – это отрезок, соединяющий середины сторон [*AB*] и [*CD*];

2) если [*BC*] не параллельна [*AD*], то средняя линия – это отрезок биссектрисы угла, образованного продолжением сторон [*BC*] и [*AD*], который лежит внутри четырехугольника.

Всюду далее термин «средняя линия» будет употребляться в смысле определения 1. Под четырехугольником общего вида будем понимать четырехугольник, не имеющий параллельных сторон.

Заметим, что возможно иное обобщение понятия средней линии, например введение его как отрезка, соединяющего середины противоположных сторон четырехугольника [1].

Для выпуклого четырехугольника *ABCD* общего вида построим его средние линии [*PQ*] и [*RT*] (*рис. 2*).

Основные обозначения, необходимые для формулировки основного результата, сведем в *табл. 1*.

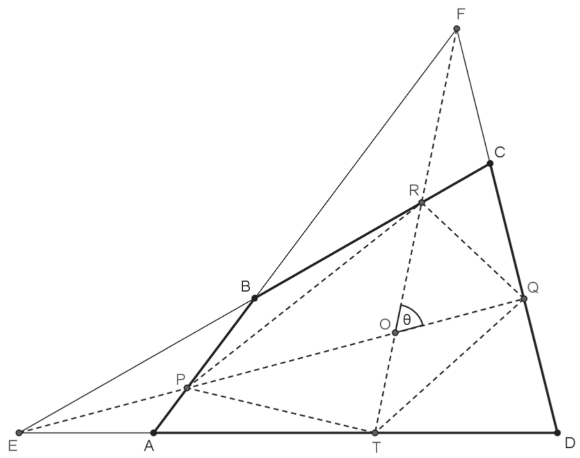

Рис. 2. Иллюстрация к формулировке и доказательству теоремы

Теорема. Для любого выпуклого четырехугольника имеет место формула

$$S = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\theta}{2(1-\rho_1-\rho_2-\rho_3-\rho_4)}, \qquad (1)$$

где

$$\rho_1 = \left[\left(1+\frac{cd\sin\delta}{ab\sin\beta}\right)\left(1+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)\right]^{-1}, \qquad (2)$$

$$\rho_2 = \left[\left(1+\frac{da\sin\alpha}{bc\sin\gamma}\right)\left(1+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\left(1+\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\right)\right]^{-1}, \qquad (3)$$

$$\rho_3 = \left[\left(1+\frac{ab\sin\beta}{cd\sin\delta}\right)\left(1+\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\right)\left(1+\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}\right)\right]^{-1}, \qquad (4)$$

Таблица 1

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Длины основных отрезков	$\lvert AB\rvert := a$	$\lvert BC\rvert := b$	$\lvert CD\rvert := c$	$\lvert DA\rvert := d$	–
Длины вспомогательных отрезков	$\lvert PQ\rvert := l_1$	$\lvert RT\rvert := l_2$	–	–	–
Углы	$\angle A := \alpha$	$\angle B := \beta$	$\angle C := \gamma$	$\angle D := \delta$	$\angle O := \theta$

Примечание: символ := означает «равно по определению», причем двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

$$\rho_4 = \left[\left(1+\frac{bc\sin\gamma}{da\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}\right)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\right]^{-1}. \quad (5)$$

Доказательство теоремы. Вспомогательные обозначения, необходимые для доказательства теоремы, сведем в *табл. 2*.

Доказательство теоремы основано на трех леммах.

Лемма 1. Концевые точки средних линий разбивают стороны четырехугольника общего вида на части, которые выражаются через длины соответствующих сторон по формулам:

$$\begin{cases} a_1 = a\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{-1} \\ a_2 = a\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^{-1} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} b_1 = b\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^{-1} \\ b_2 = b\left(1+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^{-1} \end{cases}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} c_1 = c\left(1+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}\right)^{-1} \\ c_2 = c\left(1+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}\right)^{-1} \end{cases}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} d_1 = d\left(1+\dfrac{\sin\delta}{\sin\alpha}\right)^{-1} \\ d_2 = d\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\sin\delta}\right)^{-1} \end{cases}. \quad (9)$$

Доказательство.

Рассмотрим треугольник EAB (*рис. 2*). По теореме о биссектрисе $\dfrac{|EA|}{|EB|}=\dfrac{|AP|}{|PB|}$, или $\dfrac{t}{u}=\dfrac{a_1}{a_2}$. Из системы $\begin{cases} \dfrac{t}{u}=\dfrac{a_1}{a_2} \\ a_1+a_2=a \end{cases}$ получим, что

$$\begin{cases} a_1 = a\left(1+\dfrac{u}{t}\right)^{-1} \\ a_2 = a\left(1+\dfrac{t}{u}\right)^{-1} \end{cases}. \quad (10)$$

Вновь рассмотрим треугольник *EAB*. По теореме синусов получим, что

$$\frac{t}{\sin\angle ABE}=\frac{u}{\sin\angle BAE},$$

откуда $\dfrac{u}{t}=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Подставив полученное выражение в систему (10), получим систему (6).

Формулы (7–9) получаются аналогично, с той разницей, что для их доказательства необ-

Таблица 2

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Длины основных отрезков	$\lvert AB\rvert := a$	$\lvert BC\rvert := b$	$\lvert CD\rvert := c$	$\lvert DA\rvert := d$
Длины первых частей отрезков	$\lvert AP\rvert := a_1$	$\lvert BR\rvert := b_1$	$\lvert CQ\rvert := c_1$	$\lvert DT\rvert := d_1$
Длины вторых частей отрезков	$\lvert PB\rvert := a_2$	$\lvert RC\rvert := b_2$	$\lvert QD\rvert := c_2$	$\lvert TA\rvert := d_2$
Длины вспомогательных отрезков	$\lvert EA\rvert := t$	$\lvert EB\rvert := u$	$\lvert FB\rvert := v$	$\lvert FC\rvert := w$
Площади отсекаемых треугольников	$S_{ABC} := S_1$	$S_{ADC} := S_2$	$S_{BCD} := S_3$	$S_{BAD} := S_4$

ходимо рассмотреть треугольники *FBC*, *EDC* и *FDA* соответственно.

Лемма 2. Диагонали четырехугольника разбивают его на части, площади которых выражаются через площадь четырехугольника по формулам:

$$\begin{cases} S_1 = S\left(1+\dfrac{cd\sin\delta}{ab\sin\beta}\right)^{-1} \\ S_2 = S\left(1+\dfrac{ab\sin\beta}{cd\sin\delta}\right)^{-1} \end{cases}, \qquad (11)$$

$$\begin{cases} S_3 = S\left(1+\dfrac{da\sin\alpha}{bc\sin\gamma}\right)^{-1} \\ S_4 = S\left(1+\dfrac{bc\sin\gamma}{da\sin\alpha}\right)^{-1} \end{cases}. \qquad (12)$$

Доказательство. Диагональ [*AC*] разбивает четырехугольник на два треугольника. Пусть [*BM*] и [*CN*] – высоты треугольников *ABC* и *ADC* соответственно (*рис. 3*).

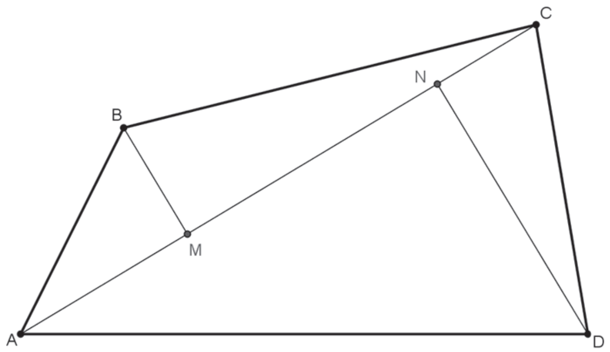

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 2

Очевидно, что $S_1 = |AC| \cdot |BM| / 2$ и $S_2 = |AC| \cdot |DN| / 2$, откуда следует, что $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{|BM|}{|DN|}$. Из этого соотношения и очевидного равенства $S_1 + S_2 = S$ следует:

$$\begin{cases} S_1 = S\left(1+\dfrac{|DN|}{|BM|}\right)^{-1} \\ S_2 = S\left(1+\dfrac{|BM|}{|DN|}\right)^{-1} \end{cases}. \qquad (13)$$

Вычислим площадь треугольника *ABC* двумя способами: $S_1 = |AC| \cdot |BM| / 2 = ab\sin\beta / 2$. Отсюда $|BM| = \dfrac{ab\sin\beta}{|AC|}$. Аналогично из треугольника *ADC* получим, что $|DN| = \dfrac{cd\sin\delta}{|AC|}$.

Из двух последних равенств следует, что $\dfrac{|DN|}{|BM|} = \dfrac{cd\sin\delta}{ab\sin\beta}$. Подставив это выражение в формулы (13), получим формулы (11).

Формулы (12) получаются полностью аналогично формулам (11), с той разницей, что в четырехугольнике нужно провести другую диагональ.

Если в четырехугольнике последовательно соединить отрезками концевые точки средних линий, то эти отрезки «отсекут» от четырехугольника четыре треугольника (*рис. 2*). Следующая лемма показывает, как выражаются их площади через площадь четырехугольника.

Лемма 3. Площади «отсекаемых» треугольников и площадь четырехугольника общего вида связаны формулами

$$S_{PBR} = S\rho_1,\ S_{RCQ} = S\rho_2,\ S_{QDT} = S\rho_3,\ S_{TAP} = S\rho_4, \qquad (14)$$

где множители ρ_i заданы равенствами (2–5).

Доказательство. Начнем с треугольника *PBR*. Вычислим его площадь по стандартной формуле: $S_{PBR} = \dfrac{1}{2}a_2b_1\sin\beta$. Выразив длины отрезков a_2 и b_1 по формулам (6) и (7), получим, что $S_{PBR} = \dfrac{1}{2}a\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^{-1} b\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^{-1}\sin\beta$. Сгруппировав некоторые сомножители последнего выражения, получим, что $\dfrac{1}{2}ab\sin\beta = S_{ABC} =: S_1$, откуда $S_{PBR} = S_1\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^{-1}$. Заменив S_1 по формуле (11) и применив определение ρ_1, получим первое из равенств (14).

Остальные равенства доказываются аналогично. Продолжим доказательство теоремы. Сначала докажем равенство (1) для выпуклого четырехугольника общего вида.

В силу построения исходный четырехугольник разбивается на несколько многоугольников (*рис. 2*), поэтому справедливо равенство $S = S_{PRQT} + S_{PBR} + S_{RCQ} + S_{QDT} + S_{TAP}$. Первое слагаемое заменим по стандартной формуле: $S_{PRQT} = \frac{1}{2}|PQ|\cdot|RT|\cdot\sin\theta$. С учетом основных обозначений получим, что $S_{PRQT} = \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\theta$. Остальные слагаемые заменим по формуле (14): $S = \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\theta + S\rho_1 + S\rho_2 + S\rho_3 + S\rho_4$. Отсюда следует равенство (1).

Теперь докажем равенство (1) для четырехугольника, две стороны которого параллельны. Для определенности будем считать, что $[BC]\|[AD]$.

Предыдущие рассуждения не могут быть применены в полном объеме, потому что при доказательстве лемм 1 и 3 существенным образом использовалась непараллельность противоположных сторон. Поступим следующим образом.

Вычислим каждую из величин ρ_i для того случая, когда две стороны параллельны, т. е. когда $\beta = \pi - \alpha$ и $\delta = \pi - \gamma$. По определению

$$\rho_1 = \left(1 + \frac{cd\sin\delta}{ab\sin\beta}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^{-1}.$$

По формуле (11) первый сомножитель в правой части равен S_1/S. Подставив в два другие сомножителя $\beta = \pi - \alpha$, получим, что

$$\rho_1 = \frac{S_1}{2S}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma}. \qquad (15)$$

Аналогично получим: $\rho_2 = \frac{S_3}{2S}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma}$

$$\rho_3 = \frac{S_2}{2S}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma}\quad \rho_4 = \frac{S_4}{2S}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma}. \qquad (16)$$

Вычислим теперь знаменатель формулы (1), обозначив его для краткости буквой Ω:

$$\Omega = 2(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3 - \rho_4) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{S_1}{2S}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma} - \frac{S_3}{2S}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma} - \right.$$

$$\left. - \frac{S_2}{2S}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma} - \frac{S_4}{2S}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma}\right).$$

Выносяза скобки выражение $2S(\sin\alpha + \sin\gamma)$, получим, что

$$\Omega = \frac{2S(\sin\alpha + \sin\gamma) - S_1\sin\gamma - S_3\sin\alpha - S_2\sin\alpha - S_4\sin\gamma}{S(\sin\alpha + \sin\gamma)}.$$

Пользуясь очевидной формулой $2S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что

$$\Omega = \frac{(S_1 + S_4)\sin\alpha + (S_2 + S_3)\sin\gamma}{S(\sin\alpha + \sin\gamma)}. \qquad (17)$$

Покажем теперь, что

$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3 = S. \qquad (18)$$

Рассмотрим трапецию $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O. Очевидно, что $S_1 + S_4 = S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ABC} + S_{ABO} + S_{ODA}$. Хорошо известно [2, с. 161], что в трапеции треугольники ABO и OCD равновелики, поэтому равенство приобретет вид $S_1 + S_4 = S_{ABC} + S_{OCD} + S_{ODA} = S_{ABC} + S_{ADC} + S$. Равенство $S_2 + S_3 = S$ доказывается аналогично.

В силу соотношений (18) формула (17) приобретает вид

$$\Omega = \frac{S\sin\alpha + S\sin\gamma}{S(\sin\alpha + \sin\gamma)} = 1 \cdot$$

Итак, если $[BC]\|[AD]$, то правая часть формулы (1) приобретает вид: $l_1 \cdot l_2 \cdot \sin\theta$, а в конце раздела 1 было показано, что оно равно S. Теперь теорема доказана.

Рассмотрим полученный результат с различных точек зрения. Прежде всего, формула (1) оставляет двойственное впечатление. С одной стороны, если рассматривать ее общую структуру, то она достаточно проста: площадь выпуклого четырехугольника равна произведению средних линий и синуса угла между ними, деленному на некое выражение. С другой стороны, структура делителя сложна, что делает формулу громоздкой. По-видимому, эта громоздкость неизбежна, потому что формула связывает в единое целое 12 (!) числовых характеристик четырехугольника: длины сторон, величины углов, длины средних линий, угол между ними и площадь. Конечно, между этими величинами существуют зависимости. Можно было бы ограничиться длинами двух смежных сторон и величинами трех прилегающих к ним углов, а затем выразить через них оставшиеся параметры, но от этого преобразования формула только усложнилась бы.

Интересно, что выражение в знаменателе формулы (1) достаточно красиво, несмотря на свою громоздкость. Стороны и углы входят в него неким регулярным образом; размерности сторон (скажем, в метрах) присутствуют в числителях и знаменателях в равных степенях и сокращаются, так что все выражение становится безразмерным; происхождение слагаемых и сомножителей нетрудно восстановить, обратившись к процессу доказательства.

Подводя итог, можно сказать, что полученная вычислительная формула не является основным результатом наших рассуждений. Главным является обобщение понятия средней линии на случай выпуклого четырехугольника.

Экспериментальная математика и задачи о средних линиях. В процессе постановки задачи мы использовали физические соображения, которые могли бы быть легко продемонстрированы посредством динамической модели, созданной в интерактивной геометрической среде, например в среде «GeoGebra». Выясним, каким образом и насколько глубоко можно исследовать средние линии четырехугольника средствами экспериментальной математики. С этой целью введем новое понятие и сформулируем несколько нерешенных задач по его изучению.

Определение 2. Серединой первого порядка выпуклого четырехугольника назовем новый четырехугольник, вершинами которого являются концевые точки средних линий исходного четырехугольника. Серединой порядка n называется середина середины порядка $n - 1$.

Например, на *рис. 2* (см. с. 111) четырехугольник $PRQT$ является серединой четырехугольника $ABCD$.

Пусть $M^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$ – последовательность середин разных порядков. Очевидно, что $ABCD \supset M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \dots$. Почти очевидно, что линейные размеры середин стремятся к нулю. Если это так, то по теореме Кантора получим, что существует и единственна точка $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} M^{(i)}$. Естественно назвать точку Z центром четырехугольника.

Приведенные рассуждения порождают ряд задач.

Задача 1 состоит из нескольких частей: 1) доказать наличие центра четырехугольника; 2) зная координаты вершин четырехугольника, найти координаты его центра; 3) выявить какую-либо зависимость между сторонами и углами четырехугольника и положением центра.

Пытаясь получить наводящие соображения, авторы построили середины четырехугольника до 10-го порядка включительно (*рис. 4*) и рассмотрели последовательность точек O_n, $n = 1, 2, \dots$, в которых пересекаются диагонали середин соответствующих порядков. При этом координаты точек O_n вычислялись с точностью до пяти знаков после запятой.

Рис. 4. Иллюстрация к задачам 1–3

Эксперимент показал, что при данной точности вычислений (достаточно высокой) точки O_n и O_{n+1} становятся неразличимы начиная уже с девятого члена последовательности. Важно, что такой результат не зависит от взаимного расположения вершин исходного четырехугольника. Это подсказывает, что имеет смысл говорить о сходимости изучаемой последовательности точек. Заметим, что компьютерный эксперимент позволяет найти предел этой последовательности с любой точностью, допускаемой компьютером, однако оставляет открытым вопрос о том, как может быть построена точка, являющаяся пределом последовательности $\{O_n\}$.

Приведенные рассуждения порождают следующую задачу.

Задача 2. 1) Доказать, что предел последовательности $\{O_n\}$ существует, и найти его. 2) Доказать, что искомый предел равен *Z*.

Визуальный анализ середин показал, что с ростом порядка середины она становится все больше и больше «похожа» на параллелограмм. Чтобы наполнить смыслом нематематическое слово «похожа», вспомним один из признаков параллелограмма: четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные углы равны.

Эксперимент состоял в следующем. Пусть α_n, β_n, γ_n и δ_n – это последовательно расположенные углы середины порядка *n*. Рассмотрим последовательность чисел $\{\Delta_n\}$, где $\Delta_n :=$ $:= \max\{|\alpha_n - \gamma_n|, |\beta_n - \delta_n|\}$ Вычисления показывают, что последовательность $\{\Delta_n\}$, скорее всего, стремится к нулю. Это наблюдение порождает задачу 3.

Задача 3. Доказать, что последовательность $\{\Delta_n\}$ стремится к нулю и, следовательно, середины действительно становятся похожи на параллелограмм.

Повторимся: утверждения, сформулированные в задачах, являются не более чем гипотезами, которые, впрочем, подтверждены большим количеством примеров. Доказательство их справедливости требует повторного обращения к теоретическим методам. Однако это мы оставим за рамками данной статьи.

Вместо заключения. Вернемся к заглавию нашей статьи: «Средние линии четырехугольника, или Красивое бесполезное обобщение». Как мы уже говорили, представленная в статье формула площади выпуклого четырехугольника вряд ли будет полезна для практики вычислений, несмотря на красоту и гармоничность составляющих ее частей. Тем не менее она достаточно интересна в качестве примера полезных обобщающих рассуждений о средних линиях, которые опираются на физические соображения о динамической изменчивости фигур. По мнению авторов, использование подобных соображений в элементарной геометрии открывает новые возможности в развитии этого, казалось бы, уже завершенного раздела математики. В подтверждение нашего мнения отошлем читателей к работам В. Ненкова и С. Гроздева в области элементарной геометрии [3, 4], а также к электронной энциклопедии центров треугольников К. Кимберлинга [5].

Список литературы

1. Четырехугольники. URL: http://math4school.ru/chetyrehugolniki.html (дата обращения: 21.04.2015).
2. *Рыбакова Т.Л., Суслова И.В*. Математика: школ. справ. Ярославль, 1997. 333 с.
3. *Grozdev S., Nenkov V.* Three Remarkable Points on the Medians of the Triangle. Sofia, 2012.
4. *Grozdev S., Nenkov V.* About Orthocenter in Plane and Space. Sofia, 2012.
5. *Kimberling C.* Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (дата обращения: 21.04.2015).

References

1. *Chetyrekhugol'niki* [Quadrangles]. Available at: http://math4school.ru/chetyrehugolniki.html (accessed 21.04.2015).
2. Rybakova T.L., Suslova I.V. *Matematika: shkol'nyy spravochnik* [Mathematics: a Guide for Schools]. Yaroslavl, 1997. 333 p.
3. Grozdev S., Nenkov V. *Three Remarkable Points on the Medians of the Triangle*. Sofia, 2012.
4. Grozdev S., Nenkov V. *About Orthocenter in Plane and Space*. Sofia, 2012.
5. Kimberling C. *Encyclopedia of Triangle Centers*. Available at: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (accessed 21.04.2015).

Yastrebov Aleksandr Vasil'evich
Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl, Russia)

Shabanova Mariya Valer'evna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

THE QUADRANGLE MIDLINES, OR ATTRACTIVE USELESS SYNTHESIS

Dedicated to T.M. Korikova

The paper deals with new results concerning the geometry of a convex quadrangle. Considering mathematics as a body of knowledge, we introduce the concept of “the midline of a convex quadrangle” and “the *n*-th order middle of a convex quadrangle”. The formula expressing the area of a convex quadrangle through the lengths of its midlines and some other numerical characteristics is proved. The peculiarity of the resulting formula is a combination of 12 numerical characteristics. Several hypotheses concerning the sequence of midpoints of a convex quadrangle are formulated and experimentally-confirmed. Thus, we indicate a possible study direction of the geometry of a quadrangle. Considering mathematics as an area of human activity, the paper presents the logic of statement and solution of the investigative problem in the selected area of geometry. In the opinion of the authors the mathematician-theorist and mathematician-experimentalist activities are of great interest. The paper deals with the experimental roots of mathematics. Methodology of the paper includes a complex of complementary methods: considerations of the alteration of figures, comparison of some mathematical formulas from the viewpoint of their stability under deformations, a method of theoretical synthesis, and experimental methods. All hypotheses for the convex quadrangle properties have been obtained as a result of the computer experiment in the interactive geometric environment "GeoGebra". Hence, the use of computers generates new investigative ideas in the elementary geometry.

Keywords: *elementary geometry, convex quadrangle, synthesis, computer experiment, multitemporal model.*

Контактная информация:
Ястребов Александр Васильевич
адрес: 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108;
e-mail: a.yastrebov@yspu.org

Шабанова Мария Валерьевна
адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68В;
e-mail: m.shabanova@narfu.ru