УДК 533.72

***ПОПОВ Василий Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 173 научных публикаций, в т. ч. 4 монографий*

***ГУЛАКОВА Светлана Викторовна**, аспирант кафедры прикладной математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 7 научных публикаций*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИЛЬЯМСА В ЗАДАЧЕ КРАМЕРСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗЕРКАЛЬНО-ДИФФУЗНОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ МАКСВЕЛЛА

В рамках кинетического подхода построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. В качестве основного уравнения используется линеаризованное уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на обтекаемой поверхности – модель зеркально-диффузного отражения Максвелла. Выбор модели интеграла столкновений обусловлен тем, что предположение о независимости частоты столкновений молекул газа от их скорости представляет собой достаточно сильное упрощение. Это предположение приводит к тому, что частота столкновений молекул газа должна быть пропорциональна абсолютной величине их тепловой скорости. Именно это и было учтено при построении уравнения Вильямса. Выбор модели граничного условия обусловлен тем, что для реальных поверхностей коэффициент диффузности может существенно отличаться от единицы. Общее решение исходного интегро-дифференциального уравнения построено в пространстве обобщенных функций. Подстановка построенного общего решения в граничные условия приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши, которое с использованием методов теории комплексного переменного сводится к краевой задаче Римана. Неизвестные параметры, входящие в общее решение, найдены из условия разрешимости построенной краевой задачи. Исходя из статистического смысла функции распределения, для различных значений коэффициента диффузности построен профиль массовой скорости газа в полупространстве над стенкой и вычислена скорость изотермического скольжения газа. Проведенный численный анализ полученных выражений и выполненное сравнение полученных результатов с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати, подтверждает зависимость значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений.

***Ключевые слова:** кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения.*

В рамках классической газодинамики при постановке граничных условий на обтекаемых газом поверхностях используют так называемые условия «прилипания», т. е. полагают, что скорость газа вблизи обтекаемой поверхности равна скорости самой поверхности [1]. Однако это условие носит приближенный характер и применимо лишь тогда, когда среднюю длину свободного пробега молекул газа можно считать сколь угодно малой [2]. Кроме того, оно не выполняется в случае разреженного газа. Как показали исследования, проведенные А. Кундтом и Е. Варбургом [3], вместо того чтобы полностью «прилипать» к обтекаемой поверхности, разреженный газ сохраняет около нее некоторую, хотя и малую скорость. В случае постоянства температуры газа это явление получило название изотермического скольжения. Решению задачи об изотермическом скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности посвящено значительное число работ, обзор которых можно найти в [4]. При этом в большинстве работ решение задачи ограничивалось вычислением коэффициента изотермического скольжения для случая диффузного отражения молекул газа поверхностью. Исключение составляют исследования [4–6], в которых рассматривался также вопрос о построении профиля скорости газа над стенкой. В качестве основных уравнений, описывающих кинетику процесса, в [4–6] использованы модели с постоянной частотой столкновений. Однако предположение о независимости частоты столкновений молекул газа от их скорости представляет собой достаточно сильное упрощение [4]. Более реалистичным является предположение о постоянстве длины свободного пробега молекул газа, по крайней мере для тех молекул, взаимодействие которых можно аппроксимировать моделью твердых сфер. Данное предположение эквивалентно тому, что частота столкновений молекул должна быть пропорциональна абсолютной величине (модулю) их тепловой скорости. Это обстоятельство учтено в [4] при построении модельного уравнения Вильямса; в качестве приложения в рамках построенного уравнения вычислена скорость изотермического скольжения газа вдоль твердой плоской поверхности. При этом на стенке использована модель диффузного отражения. Целью представленной работы является обобщение результатов, полученных в [4] на случай зеркально-диффузного отражения молекул газа стенкой. Для произвольных значений коэффициента диффузности вычислена скорость скольжения газа и построен профиль скорости газа в полупространстве, ограниченном стенкой.

Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Рассмотрим газ, заполняющий полупространство $x' > 0$, ограниченное стенкой, расположенной в плоскости $x' = 0$. Ось Oz' направим вдоль массовой скорости газа. Предположим, что газ неоднороден из-за градиента z – компоненты массовой скорости вдоль оси Ox', причем градиент скорости стремится к константе при $x' \to +\infty$. В выбранной системе координат уравнение Вильямса записывается в виде

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{v}_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \quad (1)$$

Здесь [4] $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – модуль тепловой скорости молекул газа, $\mathbf{r}'$– размерный радиус-вектор, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – гидродинамическая скорость газа, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2} / p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $f = f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$– искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $\gamma = 15\sqrt{\pi}/16$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_*}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2\right). (2)$$

Параметры n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$ в (2) выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии.

Будем полагать, что состояние газа мало отличается от равновесного. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно искать в виде

$$f(\mathbf{r}',\mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}',\mathbf{v})\left[1 + C_z Z\left(x, \frac{C_x}{C}\right)\right], \quad (3)$$

$$f_\infty(\mathbf{r}',\mathbf{v}) = f(C)\left[1 + C_z\left\{2U_0 + 2G_v\left(x - \frac{C_x}{C}\right)\right\}\right]. \quad (4)$$

Здесь $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа вдали от стенки [4], $f(C)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T$ – параметр, используемый при переходе к безразмерной скорости, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T – температура газа, $x = x'/l_g\gamma$ – безразмерная координата, G_v – безразмерный градиент скорости газа вдали от стенки, U_o – искомая скорость изотермического скольжения. Линеаризуем $f_* = f_*(\mathbf{r}',\mathbf{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, т. е. запишем ее в виде:

$$f_*(\mathbf{r}',\mathbf{v}) = f(C)\left[1 + 2C_z U_z^*\right], \quad (5)$$

$$U_z^* = \frac{3}{8\pi}\int C\exp(-C^2)\, C_z^2 \times$$

$$\times\left[2U_0 + 2G_v\left(x - \frac{C_x}{C}\right) + Z\left(x, \frac{C_x}{C}\right)\right]d^3C.$$

Подставляя (3) и (5) в (1) и учитывая, что в рассматриваемом приближении $|\mathbf{u}(\mathbf{r}')| \ll |\mathbf{v}|$, приходим к уравнению:

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)Z(x,\tau)\,d\tau,$$

$$\mu = C_x / C. \quad (6)$$

Рассмотрим далее граничные условия, которым должна удовлетворять функция $Z(x$, m) на стенке и вдали от нее. Сравнивая (3) и (4), находим

$$Z(+\infty, \mu) = 0, \quad -1 < \mu < 0. \quad (7)$$

Будем полагать, что на стенке функция распределения молекул газа удовлетворяет зеркально-диффузному граничному условию, которое имеет вид [4]:

$$f^+(\mathbf{r}',\mathbf{v})|_s = (1-q)f^-(\mathbf{r}',\mathbf{v})|_s + qf_s(\mathbf{r}',\mathbf{v}),$$

$$0 < \mu < 1 \quad (8)$$

Здесь $f^+(\mathbf{r}',\mathbf{v})|_s$ – функция распределения отраженных от стенки молекул, $f^-(\mathbf{r}',\mathbf{v})|_s$ – падающих, $f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v})$ – функция распределения молекул, параметры которой совпадают с параметрами стенки, q – коэффициент диффузности [4]. Подставляя (3) в (8) и учитывая, что $f_s(\mathbf{r}',\mathbf{v}) = f(C)$, после преобразований получаем:

$$Z(0,\ \mu) = (1-q)Z(0,-\mu) - 2qU_0 + 2(2-q)G_v\mu,$$
$$0 < \mu < 1. \quad (9)$$

Таким образом, отыскание скорости изотермического скольжения вдоль твердой плоской поверхности и построение профиля массовой скорости газа над стенкой сводится к решению краевой задачи (6), (7), (9).

Построение функции распределения молекул газа. Общее решение уравнения (6) имеет вид [4]:

$$Z(x,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)a(\eta)F(\eta,\mu)\,d\eta. \quad (10)$$

Здесь $F(\eta,\mu) = \frac{3}{4}\eta \mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1-\eta^2}\delta(\eta-\mu)$ – собственные векторы непрерывного спектра, $\lambda(z) = 1 + \frac{3}{4}z\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)d\tau}{\tau - z}$ – дисперсионная функция Вильямса, $\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu}$ и $\delta(\eta-\mu)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$ и дельта-функция Дирака.

Принимая во внимание (7), находим $A_0 = 0$, $A_1 = 0$. Подставляя далее (10) в (9), приходим к сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{3}{4}\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2}a(\mu) = (1-q)\frac{3}{4}\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu} - 2qU_0 + 2(2-q)G_v\mu. \quad (11)$$

Решение (11) ищем в виде интеграла типа Коши $N(z)=\frac{3}{4}\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta-z}$. (12)

С учетом краевых значений функций *N(z)* и $\lambda(z)$ на верхнем и нижнем берегах разрезов сведем сингулярное интегральное уравнение (11) к краевой задаче Римана:

$$[N^+(\mu)+2qU_0-2(2-q)G_v\mu]\lambda^+(\mu)-$$
$$-[N^-(\mu)+2qU_0-2(2-q)G_v\mu]\lambda^-(\mu)=$$
$$=\frac{3}{2}\pi i\mu(1-\mu^2)\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu},\ 0<\mu<1. \quad (13)$$

Особенность краевой задачи (13) состоит в том, что функции *N(z)* и $\lambda(z)$ имеют разные разрезы. Для того чтобы устранить эту особенность, необходимо решить задачу факторизации, т. е. построить такую функцию *X(z)*, для которой при $0<\mu<1$ выполняется равенство $X^+(\mu)/\lambda^+(\mu)=X^-(\mu)/\lambda^-(\mu)$ и которая является аналитической при всех остальных *z*. Решение этой задачи имеет вид [4]:

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp[V(z)],\qquad V(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{[\theta(\tau)-\pi]d\tau}{\tau-z},$$
$$\theta(\tau)=arcctg\frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1-\tau^2)}.$$

С учетом решения задачи факторизации краевую задачу (13) перепишем в виде:

$$[N^+(\mu)+2qU_0-2(2-q)G_v\mu]X^+(\mu)-[N^-(\mu)+$$
$$+2qU_0-2(2-q)G_v\mu]X^-(\mu)=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\pi i\mu(1-\mu^2)\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu},$$
$$0<\mu<1. \quad (14)$$

Разрезы функций, входящих в краевую задачу (14), совпадают с контуром краевого условия, следовательно, получили задачу по отысканию кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Ее решение находим по формуле Сохоцкого:

$$N(z)=\frac{1}{X(z)}\frac{3}{4}\int_0^1\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z}\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}-$$
$$-2qU_0+2(2-q)G_vz+\frac{P_n(z)}{X(z)}. \quad (15)$$

Здесь $P_n(z)$ – многочлен *n*-й степени с неопределенными коэффициентами, степень которого будет определена позже. Так как функция *N(z)* согласно (12) задана интегралом типа Коши, то в окрестности бесконечно удаленной точки для нее должно выполняться условие *N(z) = O(1/z)*. Потребуем выполнения этого условия и от решения (15). Разложим (15) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z|\to\infty$

$$\frac{3}{4}\int_0^1\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z}\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}=$$
$$=-\frac{1}{z}\frac{3}{4}\int_0^1\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu(1-\mu^2)d\mu\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$
$$\frac{1}{X(z)}=z-X_2+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $X_2=0{,}581946$, находим:

$$N(z)=-\frac{3}{4}\int_0^1\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu(1-\mu^2)d\mu\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}-$$
$$-2qU_0+2(2-q)G_vz+(z-X_2)P_n(z),\ |z|\to\infty. \quad (16)$$

Из (16) видно, что функция *N(z)*, задаваемая выражением (15), имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка. Для того чтобы устранить этот полюс, необходимо в качестве $P_n(z)$ взять многочлен нулевой степени, т. е. положить $P_n(z)=C_0$. Тогда, приравнивая в (16) коэффициенты при одинаковых степенях *z*, находим:

$$C_0=-2(2-q)G_v,$$
$$U_0=\frac{1}{q}\left[(2-q)X_2G_v-\frac{3}{8}(1-q)\int_0^1\eta X(-\eta)a(\eta)d\eta\right]. \quad (17)$$

При записи (17) воспользовались интегральным представлением факторизующей функции *X*(*z*), полученной в [4]:

$$X(z)=\frac{3}{4}\int_0^1\frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\mu(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-z}. \quad (18)$$

Для нахождения коэффициентов $a(\eta)$ в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра, воспользуемся соотношением (15) предварительно его преобразовав. Заметим, что

$$\frac{1}{\mu-z}\frac{1}{\eta+\mu}=\frac{1}{\eta+z}\left[\frac{1}{\mu-z}-\frac{1}{\mu+\eta}\right].$$

Тогда с учетом (18) перепишем (15) в виде

$$N(z)=-\frac{1}{X(z)}\left[2(2-q)G_{\text{v}}+\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta X(-\eta)a(\eta)d\eta}{\eta+z}\right]-$$

$$-\,2qU_0+2(2-q)G_{\text{v}}z+\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta a(\eta)d\eta}{\eta+z}. \quad (19)$$

Для решения, задаваемого равенством (19), по формулам Сохоцкого можем записать:

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=\left[\frac{1}{X^-(\mu)}-\frac{1}{X^+(\mu)}\right]\times$$

$$\times\left[2(2-q)G_{\text{v}}+\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta X(-\eta)a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}\right]=$$

$$=\frac{3\pi i\mu(1-\mu^2)X(-\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2}\times$$

$$\times\left[2(2-q)G_{\text{v}}+\frac{3}{4}(1-q)\int_0^1\frac{\eta X(-\eta)a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}\right]. \quad (20)$$

Аналогично для функции *N(z)*, задаваемой формулой (12), находим:

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=\frac{3}{2}\pi i\mu a(\mu). \quad (21)$$

При записи (20) учли решение задачи факторизации дисперсионной функции, из которой следует, что $\lambda^{\pm}(\mu)=\frac{1}{2}X^{\pm}(\mu)X(-\mu)$. Из (20), (21) для нахождения коэффициентов $a(\eta)$ приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$a(\mu)=h(\mu)\left[2(2-q)G_{\text{v}}+\lambda\int_0^1\frac{\eta X(-\eta)a(\eta)d\eta}{\eta+\mu}\right], \quad (22)$$

$$\lambda=\frac{3}{4}(1-q), \qquad h(\mu)=\frac{\mu(1-\mu^2)X(-\mu)}{5|\lambda^+(\mu)|^2}.$$

Решение уравнения (22) ищем в виде ряда

$$a(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k a_k(\mu). \quad (23)$$

Подставляя (23) и (22) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим:

$$a_0(\mu)=2(2-q)G_{\text{v}}h(\mu),$$

$$a_1(\mu)=2(2-q)G_{\text{v}}h(\mu)\int_0^1\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\mu},$$

$$a_2(\mu)=2(2-q)G_{\text{v}}h(\mu)\int_0^1\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\mu}\int_0^1\frac{g(\eta_2)d\eta_2}{\eta_2+\eta_1},$$

$$g(\eta)=\frac{\eta(1-\eta^2)X^2(-\eta)}{5|\lambda^+(\eta)|^2},$$

$$a_k(\mu)=2(2-q)G_{\text{v}}h(\mu)\times$$

$$\times\int_0^1\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\mu}\int_0^1\frac{g(\eta_2)d\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\dots\int_0^1\frac{g(\eta_k)d\eta_k}{\eta_k+\eta_{k-1}}.$$

С учетом полученных результатов (17) перепишем в виде

$$\frac{U_0}{G_{\text{v}}}=\frac{(2-q)}{q}\left[X_2-\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)^{k+1}I_k\right], \quad (24)$$

$$I_0=\frac{3}{4}\int_0^1 g(\eta)d\eta, \quad I_1=\frac{3}{4}\int_0^1 g(\eta)d\eta\frac{3}{4}\int_0^1\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\eta},$$

$$I_k=\frac{3}{4}\int_0^1 g(\eta)d\eta\int_0^1\frac{g(\eta_1)d\eta_1}{\eta_1+\eta}\dots\int_0^1\frac{g(\eta_k)d\eta_k}{\eta_k+\eta_{k-1}}.$$

Итак, коэффициенты A_0, A_1 и a(η) в разложении решения (10) исходной задачи по собственным векторам дискретного и непрерывного спектра получены, и таким образом функция распределения (3) построена.

Вычисление скорости газа в канале. Профиль массовой скорости газа в канале построим, исходя из статистического смысла функции распределения

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 \times$$
$$\times \left[2U_0 + 2G_v \left(x - \frac{C_x}{C} \right) + Z \left(x, \frac{C_x}{C} \right) \right] d^3C =$$
$$= U_0 + G_v x + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} \right) a(\eta) d\eta. \qquad (25)$$

Подставляя (23) в (25), с учетом полученных результатов находим:

$$\frac{U_z(x)}{G_v} = \frac{(2-q)}{q} \left[X_2 - \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^{k+1} I_k \right] + \qquad (26)$$
$$+ x + \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k J_k(x),$$
$$J_0(x) = \frac{3}{4} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} \right) h(\eta) d\eta,$$
$$J_1(x) = \frac{3}{4} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} \right) h(\eta) d\eta \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta},$$
$$J_k(x) = \frac{3}{4} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} \right) h(\eta) d\eta \int_0^1 \frac{g(\eta_1) d\eta_1}{\eta_1 + \eta} ... \int_0^1 \frac{g(\eta_k) d\eta_k}{\eta_k + \eta_{k-1}}.$$

Значения U_0/G_v, рассчитанные согласно (24), а также аналогичные результаты, полученные в [4–6] с использованием линеаризованного уравнения Больцмана для молекул жестких сфер (LBE), модели кинетического уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) и БГК модели (BGK), приведены в *табл. 1.*

Как видно из приведенной таблицы, отличие значений скорости U_0/G_v, полученных в представленной работе, не превышает 0,3 % при q = 0,1 и 2 % при q = 1,0 от аналогичных значений, найденных в [5, 6] на основе CES и LBE моделей уравнения Больцмана. Отличие от результатов, полученных в рамках BGK модели, колеблется от 0,6 % до 5 % и обусловлено зависимостью значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений, отмеченной в [7].

Значения $U_z(x)/G_v$, рассчитанные при различных значениях q согласно (26), и соответствующие значения, полученные в [5], приведены в *табл. 2.*

Как видно из *таблицы*, полученные в работе результаты остаются корректными во всем диапазоне значений x и q.

Заключение. Итак, в работе с использованием аналитических методов в виде ряда

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ U_0/G_V ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ q

q	(24)	BGK[4]	BGK[6]	CES[5]	LBE[5]
0,1	17,0008	17,09809	17,10313	17,04462	17,0478
0,2	8,1289	8,220481	8,224902	8,169615	8,17248
0,3	5,1654	5,251263	5,255112	5,203049	5,20563
0,4	3,6790	3,759290	3,762619	3,713778	3,71609
0,5	2,783684	2,858334	2,86119	2,815562	2,81761
0,6	2,183796	2,252980	2,25541	2,212984	2,21178
0,7	1,752828	1,816621	1,818667	1,779429	1,78048
0,8	1,427476	1,485952	1,487654	1,451586	1,45292
0,9	1,172569	1,225801	1,227198	1,194247	1,19540
1,0	0,9670054	1,015064	1,01619	0,9864009	0,987328

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ $U_Z(X)/G_V$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ q

x	q = 0,1		q = 0,3		q = 0,7		q = 1,0	
	(25)	[5]	(25)	[5]	(25)	[5]	(25)	[5]
0,0	16,5425	16,472	4,7620	4,7032	1,4541	1,4150	0,7425	0,71553
0,1	16,7841	16,771	4,9860	4,9753	1,6448	1,6386	0,9101	0,90630
0,2	16,9494	16,956	5,1434	5,1494	1,7873	1,7925	1,0424	1,0463
0,3	17,0937	17,111	5,2824	5,2982	1,9162	1,9282	1,1637	1,1729
0,4	17,2266	17,252	5,4114	5,4336	2,0377	2,0541	1,2799	1,2922
0,5	17,3522	17,383	5,5340	5,5606	2,1545	2,1740	1,3926	1,4071
0,6	17,4727	17,507	5,6521	5,6821	2,2681	2,2898	1,5028	1,5189
0,7	17,5896	17,627	5,7670	5,7994	2,3792	2,4025	1,6112	1,6284
0,8	17,7036	17,743	5,8794	5,9137	2,4884	2,5130	1,7182	1,7363
0,9	17,8154	17,857	5,9899	6,0256	2,5962	2,6218	1,8241	1,8429
1,0	17,9255	17,968	6,0987	6,1356	2,7028	2,7292	1,9291	1,9484
2,0	18,9758	19,023	7,1433	7,1839	3,7362	3,7649	2,9544	2,9752

Неймана построено решение задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. Для произвольных значений коэффициента диффузности получено аналитическое выражение, описывающее профиль массовой скорости газа в полупространстве над стенкой, и вычислена скорость скольжения газа вдоль стенки. Проведенный численный анализ полученных выражений подтверждает зависимость значений коэффициентов скольжения от выбора модели интеграла столкновений.

Список литературы

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М., 2003. 840 с.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М., 1979. 528 с.
3. *Kundt A., Warburg E.* Ueber Reibung und Waermeleitung Verduennter Gase // Poggendorfs Annalen der Physik. 1875. V. 155. P. 337–525.
4. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М., 2004. 286 с.
5. *Siewert C.E.* The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. Vol. 54. P. 273–303.
6. *Siewert C.E., Sharipov F.* Model Equation in Rarefied Gas Dynamics: Viscous-Slip and Thermal-Slip Coefficients // Physics Fluids. 2002. Vol. 14, № 12. P. 4123–4129.
7. *Шарипов Ф.М., Селезнёв В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург, 2008. 230 с.

References

1. Loitsyansky L.G. *Mehanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. Moscow, 2003. 840 p.
2. Lifshits E.M., Pitaevsky L.P. *Fizicheskaja kinetika* [Physical Kinetics]. Moscow, 1979. 528 p.
3. Kundt A., Warburg E. Ueber Reibung und Waermeleitung Verduennter Gase. *Poggendorfs Annalen der Physik*, 1875, vol. 155, pp. 337–525.

4. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. *Analiticheskie reshenija granichnyh zadach dlja kineticheskih uravnenij* [Analytical Solutions of Boundary - Value Problems for Kinetic Equations]. Moscow, 2004. 286 p.
5. Siewert C.E. The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, 2003, vol. 54, pp. 273–303.
6. Siewert C.E., Sharipov F. Model Equation in Rarefied Gas Dynamics: Viscous-Slip and Thermal-Slip Coefficients. *Physics Fluids*, 2002, vol. 14, no. 12, pp. 4123–4129.
7. Sharipov F.M., Seleznyov V.D. *Dvizhenie razrezhennyh gazov v kanalah i mikrokanalah* [Dilute Gas Motion in Channels and Microchannels]. Yekaterinburg, 2008. 230 p.

Popov Vasily Nikolaevich
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

Gulakova Svetlana Viktorovna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

SOLUTION OF WILLIAMS EQUATION IN KRAMERS PROBLEM USING MAXWELL MIRROR-DIFFUSIVE BOUNDARY CONDITION

In the framework of the kinetic approach analytic solution (in the form of Neumann series) of the problem of isothermal slip of a dilute gas along a hard, flat surface is set up. The linearized Williams equation as the basic equation and the Maxwell mirror-diffusive reflection model as the boundary condition on a streamlined surface are used. We used the collision integral model due to the fact that the assumption of independence of the gas molecular collisions frequency on their velocity is a fairly strong simplification.

More realistic, in our opinion, is the assumption about the constancy of the length of free path of gas molecules, at least for those molecules, the interaction of which can be approximated by the model of hard spheres. This assumption is equivalent to the fact that the molecular collisions frequency must be proportional to the absolute value (module) of their thermal velocity. This circumstance was taken into account when the model Williams equations was constructing. The choice of model boundary condition is due to the fact that the diffusion factor for real surfaces may be significantly different from unity. The general solution of the assumed integro-differential equation is constructed in the space of generalized functions. Substitution of the constructed general solution in the boundary conditions leads to a singular integral equation with Cauchy-type kernel, which is reduced to the Riemann boundary value problem by methods of complex variable theory. Unknown parameters of the general solution are found from the condition of resolvability of the built boundary value problems. Based on the statistical meaning of the distribution function for different values of the diffusion factor the mass flux of gas profile in half-space above the wall is constructed and the isothermal slip velocity of gas is calculated. The numerical analysis of the obtained expressions and comparison of obtained results with the similar results, published in the public media, confirms the dependence of the values of the slip coefficients on choice of a collision integral model.

Keywords: *Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, exact analytic solution.*

Контактная информация:
Попов Василий Николаевич
адрес: 163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, д. 17;
e-mail: v.popov@narfu.ru

Гулакова Светлана Викторовна
адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68 В;
e-mail: s.gulakova@narfu.ru

Рецензент – *Шестаков Л.Н.*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики института естественных наук и технологий, первый проректор по образованию и науке Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова