УДК 512.533

***ЗЯБЛИЦЕВА Лариса Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 30 научных публикаций, в т. ч. двух учебных пособий и одной монографии*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУРЕШЕТКИ ПОЛУГРУПП ПРАВЫХ НУЛЕЙ ПОЛУГРУППОЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При изучении полугруппы для выяснения ее структуры удобно рассмотреть точное представление этой полугруппы полугруппой преобразований. В этом случае элементы полугруппы можно представить в виде соответствующих им преобразований. В некоторых случаях, когда полугруппа устроена достаточно сложно, такое представление может быть единственным простым способом ее описания.

В статье рассмотрена полугруппа идемпотентов S, являющаяся полурешеткой n полугрупп правых нулей. Ранее автором изучены точные матричные представления этой полугруппы, при этом рассматривались и соответствующие полугруппы преобразований, но не всей полугруппы S, а только преобразования подполугруппы, являющейся минимальным идеалом этой полугруппы. В настоящей работе доказано, что гомоморфизм F: $S \rightarrow \Im(S)$, действующий по правилу: $F(\mathrm{u}) = \rho_{\mathrm{u}}$ (ρ_{u} – правый сдвиг, соответствующий элементу $\mathrm{u} \in S$), является точным представлением полугруппы S полугруппой преобразований, а также изучен вид элементов, полученных при этом отображении.

***Ключевые слова:** полугруппа идемпотентов, полурешетка, представление полугрупп, полугруппа преобразований.*

Рассмотрим основные определения, используемые в статье.

Элемент x полугруппы называется *идемпотентом*, если $x^2 = x$. Полугруппу, каждый элемент которой является идемпотентом, называют *полугруппой идемпотентов*, а также *связкой*. Коммутативная связка называется *полурешеткой*. Полугруппа S, в которой для любых элементов x и y справедливо: $x \cdot y \cdot x = x$, называется *прямоугольной полугруппой*.

Известно, что любая полугруппа идемпотентов является полурешеткой прямоугольных полугрупп [1]. Это очень важный факт, проясняющий структуру такой полугруппы, т. к. хорошо известны строение и свойства полурешеток и прямоугольных полугрупп. Но, к сожалению, для детального выяснения строения произвольной полугруппы идемпотентов этого недостаточно.

Так как прямоугольная полугруппа изоморфна прямому произведению полугруппы правых ($x \cdot y = y$) и полугруппы левых ($x \cdot y = x$) нулей [1], то рассмотрим полугруппу S, являющуюся полурешеткой n полугрупп правых нулей: $S = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. В дальнейшем выводы, сделанные для такой полугруппы, можно будет использовать и для произвольной связки.

Для изучения полугрупп удобнее всего в качестве преобразований рассматривать правые или левые сдвиги. Каждому элементу $a \in S$ поставим в соответствие два преобразования ρ_a, λ_a, переводящие S в S, по правилу:

$\forall x \in S$: $\rho_a(x) = x \cdot a$; $\lambda_a(x) = a \cdot x$.

λ_a (ρ_a) называется *левым (правым) внутренним сдвигом полугруппы S, соответствующим элементу a* $\in$ *S.* Для полурешетки полугрупп правых нулей будем использовать правые сдвиги.

Так как $(\forall x \in S)\ (\rho_a \rho_b)(x) = x{\cdot}a{\cdot}b = \rho_{ab}(x)$, то $\rho_a \rho_b = \rho_{ab}$. Значит, отображение, ставящее в соответствие элементу a полугруппы его правый сдвиг ρ_a, будет гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу преобразований $\Im(S)$.

Будем в дальнейшем обозначать элементы из U_i символами u_i, а в некоторых случаях – символами u_{ij} или просто a, b, u, если известно, о какой именно подполугруппе идет речь.

Запишем правый сдвиг элемента u_i следующим образом: $\rho_{u_i} = \begin{pmatrix} \dots & u_{jk} & \dots \\ \dots & u_{jk}u_i & \dots \end{pmatrix}$.

Или, если обозначить: $u_{sk} = u_{jk} \cdot u_i$, то $\rho_{u_i} \begin{pmatrix} \dots u_{jk} \dots \\ \dots u_{sk} \dots \end{pmatrix}$.

Предложение 1. Для полугруппы S, являющейся полурешеткой n полугрупп правых нулей, гомоморфизм $F : S \to \Im(S)$, действующий по правилу: $F(u) = \rho_u$, является точным представлением полугруппы S полугруппой преобразований.

Доказательство. Пусть полугруппа $S = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ является полурешеткой n полугрупп правых нулей. Известно, что F – гомоморфизм. Он является точным представлением полугруппы S полугруппой преобразований в случае, если из того, что для любых $s, t \in S$ если $\rho_s = \rho_t$, то $s = t$.

Докажем сначала, что если $\rho_s = \rho_t$, то s и t принадлежат одной подполугруппе U_i. Предположим противное.

Пусть $\rho_s = \rho_t$, $s \in U_i$, $t \in U_j$, $i \neq j$. Рассмотрим, как ρ_s и ρ_t действуют на элементы из подполугруппы U_i и U_j. Пусть $u_i \in U_i$, $u_j \in U_j$.

$\rho_s(u_i) = u_i' \in U_i$. Поэтому $\rho_t(u_i) = u_i'$, а это означает, что $U_i = \inf(U_i, U_j)$.

Аналогично $\rho_t(u_j) = u_j' \in U_j$, значит, $\rho_s(u_j) = u_j'$, т. е. $U_j = \inf(U_i, U_j)$. Это противоречит тому, что $i \neq j$.

Итак, если $\rho_s = \rho_t$, то s и t принадлежат одной подполугруппе U_i.

Пусть теперь s и t принадлежат одной подполугруппе U_i. Докажем, что если в этом случае $s \neq t$, то $\rho_s \neq \rho_t$.

Рассмотрим, как ρ_s и ρ_t действуют на элементы s и t.

$\rho_s(s) = s \cdot s = s$, $\rho_t(s) = s \cdot t = t$. Т. к. $s \neq t$, то $\rho_s(s) \neq \rho_t(s)$, а значит, $\rho_s \neq \rho_t$.

Предложение доказано.

Из утверждения предложения 1 следует, что полугруппа S, являющаяся полурешеткой n полугрупп правых нулей, изоморфна подполугруппе полугруппы преобразований $\Im(S)$, состоящей из правых сдвигов элементов полугруппы S.

Поэтому, изучая данную подполугруппу, можно считать, что мы изучаем полугруппу S.

Сразу рассматривать общий случай сложно. Поэтому для начала максимально упростим задачу. Будем рассматривать связку, являющуюся полурешеткой двух полугрупп правых нулей U_1 и U_2 с минимальным идеалом U_1. Обозначим эту полугруппу (1). Ранее [2, с. 49] доказано следующее утверждение:

Предложение 2. Если S – полурешетка двух полугрупп правых нулей, гомоморфизм $F : S \to \Im(S)$ действует следующим образом: если для любого $u \in S$ $F(u) = \rho_u$, то для произвольных u_2 и $u_2^{'} \in U_2$ разбиения полугруппы U_1, которые задаются соответствующими им правыми сдвигами, совпадают.

Далее рассмотрим случай, когда $S = U_1 \bigcup U_2 \bigcup U_3$, U_i – полугруппы правых нулей, U_1, $U_1 \bigcup U_2$, $U_1 \bigcup U_3$ являются собственными идеалами в полугруппе S. Обозначим эту полугруппу (2).

В такой полугруппе произведение любых элементов принадлежит полугруппе U_1. Снова выясним, какой вид имеют ρ_{u_1}, ρ_{u_2}, ρ_{u_3}, где $u_i \in U_i$. Ранее уже было показано, что $\rho_{u_1} = \begin{pmatrix} S \\ u_1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим далее, как действует ρ_{u_2} на элементы полугрупп U_1, U_2 и U_3:

$\forall x \in U_1$: $\rho_{u_2}(x) = x\,u_2 = u_1$,

$\forall x \in U_2$: $\rho_{u_2}(x) = x\,u_2 = u_2$,

$\forall x \in U_3$: $\rho_{u_2}(x) = x\,u_2 = u_1^{'}$.

Т. е. при действии ρ_{u_2} на элементы из U_2 каждый раз получаем элемент u_2, при действии на элементы из U_1 получаем некоторый элемент из U_1, при действии на элементы из U_3 получаем некоторый элемент из U_1.

Собираем все элементы из U_1, которые отображаются в один элемент, собираем все элементы из U_3, которые отображаются в один элемент, и запишем преобразование, соответствующее элементу из U_2 (в верхней строке сначала идут элементы из U_1, затем элементы из U_2, затем – из U_3):

$$\rho_{u_2} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1k} & \dots & U_2 & U_{31} & \dots & U_{3s} & \dots \\ u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_2 & u_{11}^{''} & \dots & u_{1s}^{''} & \dots \end{pmatrix},$$

где $U_{1k} = \{u \in U_1 \mid u \cdot u_2 = u_{1k}\}$, $U_{3k} = \{u \in U_3 \mid u \times u_2 = u_{1k}^{'}\}$.

Аналогично находится преобразование, соответствующее элементу из U_3:

$$\rho_{u_3} = \begin{pmatrix} U_{11}^{'} & \dots & U_{1k}^{'} & \dots & U_{21} & \dots & U_{2t} & \dots & U_3 \\ u_{11}^{'} & \dots & u_{1k}^{'} & \dots & u_{11}^{'''} & \dots & u_{1t}^{'''} & \dots & u_3 \end{pmatrix},$$

где $U_{1k}^{'} = \{u \in U_1 \mid u \cdot u_3 = u_{1k}^{'}\}$, $U_{2k} = \{u \in U_2 \mid u \times u_3 = u_{1k}^{'''}\}$.

Очевидно, что $U_1 \bigcup U_2$ является подполугруппой полугруппы S, поэтому, по предложению 2, для любых элементов u_2 и $u_2^{'}$ разбиения полугруппы U_1, которые задаются соответствующими им правыми сдвигами, совпадают. Рассмотрим, как связаны разбиения для элементов различных подполугрупп U_2 и U_3. На этот вопрос отвечает следующее доказанное предложение [2, с. 50].

Предложение 3. Пусть в полугруппе (2) $u_2 \in U_2$, $u_3 \in U_3$. Для соответствующих этим элементам правых сдвигов

$$\rho_{u_2} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1k} & \dots & U_2 & U_{31} & \dots & U_{3s} & \dots \\ u_{11} & \dots & u_{1k} & \dots & u_2 & u_{11}^{''} & \dots & u_{1s}^{''} & \dots \end{pmatrix},$$

$$\rho_{u_3} = \begin{pmatrix} U_{11}^{'} & \dots & U_{1k}^{'} & \dots & U_{21} & \dots & U_{2t} & \dots & U_3 \\ u_{11}^{'} & \dots & u_{1s}^{'} & \dots & u_{11}^{'''} & \dots & u_{1t}^{'''} & \dots & u_3 \end{pmatrix}$$

справедливо: существует j такое, что верно $u_{11}, \dots, u_{1k}, \dots \in U_{1j}^{'}$, и существует i такое, что верно $u_{11}^{'}, \dots, u_{1s}^{'}, \dots \in U_{1i}$.

Предложение 4. В полугруппе вида (2) разбиения полугруппы U_3, порождаемые правыми сдвигами элементов u_2, $u_2^{'} \in U_2$, совпадают.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим правые сдвиги, соответствующие элементам u_2, $u_2' \in U_2$ и $u_3 \in U_3$. Запишем их следующим образом:

$$\rho_{u_2} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1t} & \dots & U_2 & U_{31} & \dots & U_{3s} & \dots \\ u_{11} & \dots & u_{1t} & \dots & u_2 & a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots \end{pmatrix},$$

$$\rho_{u'_2} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1t} & \dots & U_2 & U'_{31} & \dots & U'_{3s} & \dots \\ u'_{11} & \dots & u'_{1t} & \dots & u_2 & b_{11} & \dots & b_{1s} & \dots \end{pmatrix},$$

$$\rho_{u_3} = \begin{pmatrix} U'_{11} & \dots & U'_{1k} & \dots & U_{21} & \dots & U_{2t} & \dots & U_3 \\ u''_{11} & \dots & u''_{1k} & \dots & c_{11} & \dots & c_{1t} & \dots & u_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть ρ_{u_2} задает разбиение χ полугруппы U_3 ($U_3 = \bigcup U_{3i}$), а $\rho_{u'_2}$ задает разбиение χ' подполугруппы U_3 ($U_3 = \bigcup U'_{3j}$). Т. к. разбиения не совпадают, то существуют u_3, $u'_3 \in U_3$ такие, что $u_3 \ \chi \ u'_3$ и u_3 не находится в отношении χ' с u'_3.

Пусть u_3, $u'_3 \in U_{3k}$, $u_3 \in U'_{3s}$, $u'_3 \in U'_{3p}$, $s \neq p$.

Известно, что для u_2, $u'_2 \in U_2$ верно: $u_2 \ u'_2 = u'_2$.

Тогда $\rho_{u_2 u'_2} = \rho_{u'_2}$. Значит, для любого $x \in S$ верно: $\rho_{u_2} \ \rho_{u'_2}(x) = \rho_{u'_2}(x)$.

Найдем $\rho_{u'_2}(u_3)$. Т. к. $u_3 \in U'_{3s}$, то $\rho_{u'_2}(u_3) = b_{1s}$. С другой стороны, $\rho_{u_2} \ \rho_{u'_2}(u_3) = \rho_{u'_2}(\rho_{u_2}(u_3)) = \rho_{u'_2}(a_{1k})$ (т. к. $u_3 \in U_{3k}$).

Аналогично подействуем двумя преобразованиями на элемент u'_3.

$\rho_{u'_2}(u'_3) = b_{1p}$, т. к. $u'_3 \in U'_{3p}$. С другой стороны, $\rho_{u_2} \ \rho_{u'_2}(u'_3) = \rho_{u'_2}(\rho_{u_2}(u'_3)) = \rho_{u'_2}(a_{1k})$ (т. к. $u'_3 \in U_{3k}$).

Мы видим, что $\rho_{u_2} \ \rho_{u'_2}(u_3) = \rho_{u_2} \ \rho_{u'_2}(u'_3)$, значит, $\rho_{u'_2}(u_3) = \rho_{u'_2}(u'_3)$. Но $b_{1s} \neq b_{1p}$, т. к. $s \neq p$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Для того чтобы перейти к случаю, когда полугруппа S является полурешеткой конечного числа полугрупп правых нулей, рассмотрим случай, когда S является цепью из трех полугрупп правых нулей.

Итак, пусть $S = U_1 \bigcup U_2 \bigcup U_3$, U_i – полугруппы правых нулей, U_1, $U_1 \bigcup U_2$ являются собственными идеалами в полугруппе S. Обозначим эту полугруппу (3).

Для доказательства предложения снова рассмотрим общий вид правых сдвигов, соответствующих элементам из подполугрупп U_1, U_2, U_3. Для элемента $u_1 \in U_1$ верно: $\rho_{u_1} = \begin{pmatrix} S \\ u_1 \end{pmatrix}$.

Найдем общий вид ρ_{u_2}. Посмотрим, в какие элементы переходят при данном преобразовании элементы полугрупп U_1, U_2, U_3:

$\forall x \in U_1$: $\rho_{u_2}(x) = x \cdot u_2 = u_1$,

$\forall x \in U_2$: $\rho_{u_2}(x) = x \cdot u_2 = u_2$,

$\forall x \in U_3$: $\rho_{u_2}(x) = x \cdot u_2 = (x \cdot u_2) \cdot u_2 = u'_2 \times \times u_2 = u_2$.

Поэтому ρ_{u_2} имеет следующий вид: $\rho_{u_2} = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1s} & \dots & U_2 & U_3 \\ u_{11} & \dots & u_{1s} & \dots & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$.

Обозначим символом χ_2 эквивалентность, делящую U_1 на классы эквивалентности U_{1i}. Аналогично рассмотрим ρ_{u_3}.

$\forall x \in U_1$: $\rho_{u_3}(x) = x \cdot u_3 = u_1$,

$\forall x \in U_2$: $\rho_{u_3}(x) = x \cdot u_3 = u_2$,

$\forall x \in U_3$: $\rho_{u_3}(x) = x \cdot u_3 = u_3$.

Поэтому ρ_{u_3} имеет вид: $\rho_{u_3} = \begin{pmatrix} U'_{11} & \dots & U'_{1s} & \dots & U_{21} & \dots & U_{2k} & \dots & U_3 \\ u'_{11} & \dots & u'_{1s} & \dots & u_{21} & \dots & u_{2k} & \dots & u_3 \end{pmatrix}$.

Обозначим символом χ_3 эквивалентность, делящую U_1 на классы эквивалентности U'_{1i}.

Рассмотрим, как связаны разбиения χ_2 и χ_3.

Предложение 5. Пусть в полугруппе (3) $u_2 \in U_2$, $u_3 \in U_3$. Для соответствующих этим элементам правых сдвигов ρ_{u2}, ρ_{u_3} разбиение χ_3 является подразбиением χ_2.

Доказательство. Докажем: $(\forall\ x, y \in U_1)$ $(x\ \chi_3\ y \Rightarrow x\ \chi_2\ y)$.

Пусть существуют элементы $x, y \in U_1$ такие, что $x\ \chi_3\ y$, но x не находится в отношении χ_2 с y.

Пусть $x, y \in U'_{1i}$, $x \in U_{1j}$, $y \in U_{1k}$, $j \neq k$.

Известно: $u_3 \cdot u_2 = u_2$.

Тогда $\forall\ u_1 \in U_1$ верно: $u_1\ (u_3 \cdot u_2) = u_1\ u_2$. Для элементов $x, y \in U_1$ соответствующие им правые сдвиги: $\begin{pmatrix} S \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} S \\ y \end{pmatrix}$.

Найдем $\rho_{(xu_3)u_2}$. Пусть $u'_{1i} \in U_{2p}$.

$$\begin{pmatrix} S \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & U'_{1i} & \ldots \\ \ldots & u'_{1i} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & U_{1p} & \ldots \\ \ldots & u_{1p} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ u_{1p} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\rho_{x(u_3u_2)}$, зная, что $x \cdot (u_3 \cdot u_2) = x \cdot u_2$.

$$\rho_{xu_2} = \begin{pmatrix} S \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & U_{1j} & \ldots \\ \ldots & u_{1j} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ u_{1j} \end{pmatrix}.$$ Значит, $p = j$.

Аналогично, если мы возьмем элемент $y \in U_1$, то, используя равенство $y \cdot (u_3 \cdot u_2) = y \cdot u_2$, получим: $p = k$. Значит, $j = k$.

Полученное противоречие доказывает предложение.

Теперь перейдем к полугруппе идемпотентов S, являющейся полурешеткой n полугрупп правых нулей: $S = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Обозначим эту полугруппу (4).

Из утверждения предложения 1 следует, что полугруппа S, являющаяся полурешеткой n полугрупп правых нулей, изоморфна подполугруппе полугруппы преобразований $\mathfrak{I}(S)$, состоящей из правых сдвигов элементов полугруппы S.

Рассмотрим для элементов полугруппы S соответствующие им правые сдвиги.

Введем следующие обозначения.

ρ_{u_k} – это правый сдвиг, соответствующий элементу $u_k \in U_k$. Будем считать, что правые сдвиги, соответствующие всем элементам полугруппы S, имеют конечный ранг (т. е. число различных элементов нижней строки преобразования конечно). Это ограничение необходимо лишь для удобства записи, в доказательствах никакой роли не играет.

Следующим образом запишем правый сдвиг для элемента u_k:

$$\rho_{u_k} = \begin{pmatrix} U^k_{11} & \ldots & U^k_{1k_1} & U^k_{21} & \ldots & U^k_{2k_2} & \ldots & U_k & \ldots & U^k_{n1} & \ldots & U^k_{nk_n} \\ u^k_{11} & \ldots & u^k_{1k_1} & u^k_{t_21} & \ldots & u^k_{t_2k_2} & \ldots & u_k & \ldots & u^k_{t_n1} & \ldots & u^k_{t_nk_n} \end{pmatrix}.$$

Здесь $U_{t_1} = \inf(U_k, U_1)$.

ρ_{u_k} делит каждую из подгрупп U_i на классы эквивалентности $U^k_{i1}, \ldots, U^k_{ik_i}$. Обозначим соответствующую эквивалентность символом $\chi^k_i\,(u_k)$.

Возникает вопрос: не совпадают ли разбиения U_i для различных элементов u_k, $u'_k \in U_k$? Ответ на него дает следующее предложение.

Предложение 6. В полугруппе S вида (4) для любой подполугруппы U_k и для любой подполугруппы U_i разбиения U_i, порождаемые правыми сдвигами элементов u_k, $u'_k \in U_k$, совпадают.

Доказательство. Пусть U_1 – минимальный идеал полугруппы S. Докажем сначала утверждение предложения для элементов полугруппы U_1. Для элементов этой полугруппы верно: $(\forall\, x \in S)\ \rho_{u_1}(x) = x \cdot u_1 = (x \cdot u_1) \cdot u_1 = u'_1 \cdot u_1 = u_1$. Поэтому $\rho_{u_1} = \begin{pmatrix} S \\ u_1 \end{pmatrix}$.

Т. е. для любого элемента из U_1 утверждение справедливо: любую подполугруппу правый сдвиг любого элемента разбивает на единственный класс – саму подполугруппу.

Аналогично можно отдельно рассмотреть случай $i = k$. В этом случае также все элементы

U_k при преобразовании ρ_{u_k} переходят в один элемент u_k, т. е. также правый сдвиг любого элемента разбивает U_k на единственный класс – саму подполугруппу.

Пусть теперь элементы u_k, $u'_k \in U_k$, $k \neq 1$. Для произвольной подполугруппы U_i ($i \neq k$) покажем, что разбиения $\chi_i^k(u_k)$ и $\chi_i^k(u'_k)$ совпадают.

Для подполугрупп U_i и U_k возможны различные случаи:

1) $U_i = \inf(U_i, U_k)$;

2) $U_k = \inf(U_i, U_k)$;

3) $U_s s = \inf(U_i, U_k)$, $s \neq i$, $s \neq k$.

Рассмотрим эти случаи.

В первом случае имеем подполугруппу $U_i \bigcup U_k$ с минимальным идеалом U_i. Для такой полугруппы в предложении 2 было показано, что разбиения подполугруппы U_i, порожденные правыми сдвигами элементов u_k, $u'_k \in U_k$, совпадают.

Во втором случае имеем подполугруппу $U_i \bigcup U_k$ с минимальным идеалом U_k. Выясним, как для произвольных элементов u_k, $u'_k \in U_k$ соответствующие им правые сдвиги действуют на элементы из подполугруппы U_i.

$(\forall u_i \in U_i)\, \rho_{u_k}(u_i) = u_i \cdot u_k = (u_i \cdot u_k) \cdot u_k = u'_k \cdot u_k = u_k$, т. е. все элементы из U_i переходят в один элемент. Это означает, что есть лишь один класс разбиения подполугруппы U_i – сама подполугруппа.

В третьем случае рассмотрим подполугруппу $U_i \bigcup U_k \bigcup U_s$ полугруппы S. В предложении 4 было доказано, что в такой полугруппе разбиения подполугруппы U_i, порождаемые правыми сдвигами элементов u_k, $u'_k \in U_k$, совпадают.

Итак, доказано, что для всех случаев утверждение предложения справедливо.

Из предложения следует, что для разбиения $\div_i^k(u_k)$ не обязательно указывать элемент, правым сдвигом которого задается разбиение. Поэтому будем в дальнейшем писать просто χ_i^k.

Вернемся к произвольной полугруппе S, являющейся полурешеткой n полугрупп правых нулей U_k, $k = \overline{1,n}$.

Поставим в соответствие полугруппам U_k изоморфные им полугруппы преобразований R_k.

Элементы из полугруппы R_k имеют вид :

$$\rho_{u_k} = \begin{pmatrix} U_{11}^k & \ldots & U_{1k_1}^k & U_{21}^k & \ldots & U_{2k_2}^k & \ldots & U_k & \ldots & U_{n1}^k & \ldots & U_{nk_n}^k \\ u_{11}^k & \ldots & u_{1k_1}^k & u_{t_2 1}^k & \ldots & u_{t_2 k_2}^k & \ldots & u_k & \ldots & u_{t_n 1}^k & \ldots & u_{t_n k_n}^k \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь, как связаны разбиения полугруппы U_i, порожденные правыми сдвигами элементов, принадлежащих различным подполугруппам.

Предложение 7. В полурешетке n полугрупп правых нулей $S = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ для разбиений χ_i^k, χ_i^j ($k \neq j$) подполугруппы U_i, порожденных правыми сдвигами элементов из полугрупп U_k, U_j, справедливы следующие утверждения:

1) если одна из полугрупп U_k, U_j является их точной нижней гранью или $U_k = \inf(U_i, U_k)$ или $U_j = \inf(U_i, U_j)$, то одно из разбиений является подразбиением другого;

2) если $U_s = \inf(U_k, U_j)$, $s \neq j$, $s \neq k$, $U_k \neq \inf(U_i, U_k)$, $U_j \neq \inf(U_i, U_j)$, то разбиения подполугруппы U_i, порожденные правыми сдвигами элементов u_k, u_j из полугрупп U_k, U_j, не связаны между собой, но при этом все образы элементов подполугруппы Ui при правом сдвиге любого элемента из полугруппы U_k принадлежат одному классу разбиения χ_i^j (и наоборот).

Доказательство. Докажем сначала утверждение 1.

Рассмотрим наиболее простые случаи. Пусть, к примеру, $i = j$. Тогда χ_i^j делит U_i на единственный класс – саму полугруппу, а значит, χ_i^k – подразбиение χ_i^j. Аналогично рассматривается случай, когда $i = k$.

Пусть, далее, $U_k = \inf(U_i, U_k)$. Тогда для любых элементов u_i, u_k, принадлежащих подполугруппам U_i, U_k соответственно, верно: $u_i \cdot u_k = (u_i \cdot u_k) \cdot u_k = u'_k \cdot u_k = u_k$. Поэтому $\rho_{u_k}(u_i) = u_k$.

Это означает, что χ_i^k разбивает U_i на единственный класс – саму полугруппу. Т. к. χ_i^j – это подразбиение U_i, то в этом случае утверждение предложения также справедливо.

Рассмотрим теперь наиболее трудоемкий случай. Пусть, к примеру, $U_k = \inf(U_j, U_k)$. Подполугруппа U_i по-разному может быть расположена по отношению к этим полугруппам. А именно, из этих трех подполугрупп может образоваться цепь (это будет выполняться, если для любых двух из этих подполугрупп одна из них является их точной нижней гранью). Обозначим этот случай 1'. Во втором случае они не будут образовывать цепи (случай 2') .

1'. Рассмотрим случай, когда три подполугруппы образуют цепь. Этот случай, в свою очередь, распадается на три подслучая относительно расположения полугруппы U_i : она может располагаться внизу (случай *а*), в середине (случай *б*) и вверху цепочки (случай *в*).

Рассмотрим случай *а*. В этом случае в предложении 5 доказывалось, что разбиение χ_i^j является подразбиением χ_i^k .

В случае *б* $U_k = \inf(U_k, U_i)$. Этот случай был рассмотрен выше.

В случае *в* легко показать, что χ_i^k и χ_i^j разбивает U_i на единственный класс – саму подполугруппу, т. е. в этом случае утверждение предложения также справедливо.

2'. Далее рассмотрим случай, когда цепи из трех полугрупп не образуется. Этот случай, в свою очередь, распадается на два подслучая. Пусть $U_s = \inf(U_i, U_j)$.

Варианты могут быть следующими:

а) $U_s = \inf(U_k, U_s)$, б) $U_k = \inf(U_k, U_s)$. Рассмотрим их.

а) В этом случае χ_i^k делит U_i на классы эквивалентности. То, что в этом случае χ_i^j является подразбиением χ_i^k, доказывается аналогично доказательству предложения 5.

б) В этом случае легко показать, что χ_i^k разбивает U_i на единственный класс – саму подполугруппу, а т. к. χ_i^j разбиение U_i, то все выполнено.

Итак, утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 доказывается аналогично доказательству предложения 3.

Список литературы

1. *Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А.* Общая алгебра. М., 1991.
2. *Зяблицева Л.В.* Точные матричные представления связок, являющихся полурешетками полугрупп правых нулей // Совр. алгебра. Вып. 3(33). Ростов н/Д., 1998. С. 48–55.

References

1. Artamonov V.A., Saliy V.N., Skornyakov L.A. *Obshchaya algebra* [General Algebra]. Moscow, 1991.
2. Zyablitseva L.V. Tochnye matrichnye predstavleniya svyazok, yavlyayushchikhsya polureshetkami polugrupp pravykh nuley [Accurate Matrix Representations of Bands Being Semilattices of Right Zero Semigroups]. *Sovremennaya algebra* [Modern Algebra]. Iss. 3 (33). Rostov-on-Don, 1998, pp. 48–55.

Zyablitseva Larisa Vladimirovna
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

REPRESENTATION OF SEMILATTICE OF RIGHT ZERO SEMIGROUPS BY TRANSFORMATION SEMIGROUP

Studying a semigroup to determine its structure, it would be convenient to consider the accurate representation of this semigroup by transformation semigroup. In this case, semigroup elements can be presented in the form of corresponding transformations. In some cases, when the semigroup is rather sophisticated, this representation can be the only easy way to describe it.

The paper considers the idempotent semigroup S, which is a semilattice n of right zero semigroups. Earlier the author had studied the exact matrix representations of this semigroup and the corresponding transformation semigroups, though not of the entire semigroup S but only the transformations of the subsemigroup, which is the minimal ideal of this semigroup. The paper proves that homomorphism F: S $\rightarrow \Im$(S), acting by the rule: F(u) = ρ_u (ρ_u – right shift corresponding to the element u $\in$ S) is a faithful representation of the semigroup S by transformation semigroup. In addition, the author has studied the type of elements obtained at this mapping.

Keywords: *idempotent semigroup, semilattice, representation of semigroups, transformation semigroup.*

Контактная информация:
адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68-в;
e-mail: zlarisav@yandex.ru

Рецензент – *Андреев П.Д.*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова