УДК 515.16

***АНДРЕЕВ Павел Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова. Автор 44 научных публикаций*

***СТАРОСТИНА Вера Валерьевна**, аспирант кафедры алгебры и геометрии института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова*

ГЕОМЕТРИЯ КАСАТЕЛЬНОГО КОНУСА К G-ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПО БУЗЕМАНУ

В статье изучаются геометрические свойства касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны в смысле Буземана. Авторы рассматривают конструкцию касательного конуса как основной инструмент для доказательства гипотезы Буземана о топологическом строении G-пространств в классе пространств неположительной кривизны.

***Ключевые слова:** G-пространство, неположительная кривизна, касательный конус, гипотеза Буземана.*

Введение. В цикле работ Герберта Буземана середины XX века [6, 7] разрабатывается геометрический подход к качественным проблемам дифференциальной геометрии, отличный от подхода, основанного на дифференциальном исчислении и тензорном анализе на гладких многообразиях. Работы Буземана во многом перекликаются с фундаментальными исследованиями А.Д. Александрова, начало которых положено в статье [1], и значительно дополняют их. В основе геометрического подхода Александрова-Буземана лежит понятие геодезической, обобщающее соответствующее понятие дифференциальной геометрии.

Многие естественные объекты дифференциальной геометрии при определенных условиях допускают обобщение с точки зрения геометрии геодезических, не привлекающей аппарат дифференциального исчисления. При этом возможность дифференцирования функций в метрических пространствах в том или ином смысле зачастую из инструмента исследования превращается в его цель.

Дифференцирование на гладких многообразиях тесно связано с понятием касательного пространства. Обобщением касательного пространства на случай общего геодезического пространства обычно служит касательный

© Андреев П.Д., Старостина В.В., 2013

конус, который возникает как конус над пространством направлений. Но такая трактовка касательного конуса не является единственно возможной.

В нашей статье мы определяем касательный конус K_pX к G-пространству неположительной кривизны в смысле Буземана X в заданной точке p как предел семейства метрических пространств, гомотетичных данному с центром p и изучаем его геометрические свойства. Заметим, что все условия на геометрию пространства X при определении конуса K_pX являются существенными: отсутствие какого-либо из условий влечет некорректность определения.

Построенная здесь конструкция касательного конуса имеет важное геометрическое приложение: она работает как основной инструмент в доказательстве гипотезы Буземана о топологическом строении G-пространств в случае пространств неположительной кривизны в смысле Буземана.

Предварительные сведения и постановка задачи. Метрическое пространство (X, d) называется G-пространством Буземана, если выполняются следующие аксиомы (см. [3, с. 54]):

G1. X конечно компактно, то есть всякое ограниченное бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;

G2. X выпукло по Менгеру, то есть для любых различных точек $p, q \in X$ существует точка r, лежащая строго между ними:

$d(p, q) = d(p, r) + d(r, q)$;

G3. X обладает свойством локальной продолжаемости отрезков: для любой точки $x \in X$ существует такое число $r_x > 0$, что в открытом шаре $U=U(x, r_x)$ для любых $p, q \in U$ существует точка $y \in U$ такая, что q лежит между p и y;

G4. X обладает свойством единственности продолжения отрезков: если для точек p, q, $y_1, y_2 \in U$ выполнены условия

$d(p, y_i) = d(p, q) + d(q, y_i)$, i=1,2;

$d(q, y_1) = d(q, y_2)$,

то $y_1=y_2$.

Свойство G1 эквивалентно тому условию, что в X всякое ограниченное замкнутое подмножество компактно. Из свойств G1-G2 легко следует, что всякое G-пространство является геодезическим пространством, то есть любые две точки в X можно соединить отрезком.

Мы будем рассматривать G-пространства, удовлетворяющие дополнительно условию неположительности кривизны по Буземану. Геодезическое пространство X называется пространством неположительной кривизны в смысле Буземана, если в X средняя линия любого треугольника не больше половины основания.

В книге [3, с. 69] приводится гипотеза о топологическом строении G-пространств: всякое G-пространство является топологическим многообразием. В настоящее время гипотеза Буземана доказана в некоторых частных случаях. В частности, она справедлива для пространств малой топологической размерности. В источнике [3, с. 72] эта гипотеза доказывается для топологически двумерных G-пространств. Также гипотеза доказана в случае трехмерных (см. [8]) и четырехмерных (см. [9]) G-пространств. В статье [2] она доказана для G-пространств ограниченной сверху кривизны в смысле А.Д. Александрова. Довольно полный обзор исследований по геометрии G-пространств приведен в работе Берестовского и соавторов [5].

В настоящей статье определяется понятие касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны в смысле Буземана и изучаются его геометрические свойства. Авторы рассматривают касательный конус как важный инструмент, позволяющий доказать гипотезу Буземана для указанного класса G-пространств.

Определение касательного конуса.

Пусть (X, d) – G-пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Выберем в X отмеченную точку p. Для положительного числа $\lambda<1$ и точек $y, z \in X$ обозначим y_λ, z_λ точки, соответственно, на отрезках [py] и [pz], удаленные от начала p на расстояния, соответственно, $\lambda d(p, y)$ и $\lambda d(p, z)$. Положим $d_\lambda(y,z) = 1/\lambda d(y_\lambda, z_\lambda)$. Тем самым на множестве X определена метрика d_λ, подобная исходной метрике d с коэффициентом $1/\lambda$.

Лемма 1. *Если* $\lambda_1<\lambda_2$, *то для любых* $y,z \in X$ *верно неравенство*

$$d_{\lambda_1}(y,z) \le d_{\lambda_2}(y,z) \cdot \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $\lambda_1=\lambda\lambda_2$. При таком обозначении мы имеем $z_{\lambda_1}=(z_{\lambda_2})_\lambda$ и $z_{\lambda_1}=(z_{\lambda_2})_\lambda$. Свойство неположительности кривизны по Буземану влечет выпуклость метрики d. В частности, имеем

$$d(y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \le \lambda d(y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}) \cdot$$

Отсюда легко получить

$$\frac{1}{\lambda_1} d(y_{\lambda_1}, z_{\lambda_1}) \le \frac{1}{\lambda_2} d(y_{\lambda_2}, z_{\lambda_2}),$$

что эквивалентно неравенству (1).□

Следствие 1. *Для любых* $y,z \in X$ *существует предел*

$$D(y,z) = \lim_{\lambda \to 0} d_\lambda(y,z) \ge 0 .$$

Несложно заметить, что функция D, определенная на $X \in X$, является псевдометрикой, причем

$$D(y, z) \in d(y, z) \qquad (2)$$

для любых $y, z \in X$. . Покажем, что D в действительности является метрикой.

Лемма 2. *Функция* D – *метрика на* X.

Доказательство. Покажем методом от противного, что $D(y, z) > 0$ при $y \in z$. Действительно, пусть $D(y, z) = 0$ для различных $y, z \in X$. Заметим, что, если точка p лежит на прямой yz, то $D(y, z) = d(y, z)$. Поэтому нам достаточно рассматривать случай, когда точки p, y и z не лежат на одной прямой в смысле метрики d. Из неравенства треугольника следует, что $d(p, y) = d(p, z)$. Выберем на продолжении отрезка [yp] за точку p точку x, для которой $d(p, x) = d(p, y)$. По предположению, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любого $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $d(y_\lambda, z_\lambda) < \lambda\varepsilon$.

Поэтому

$$d(x, z) \ge 1/\lambda\, d(x_\lambda, z_\lambda) \ge 1/\lambda\, (d(x_\lambda, y_\lambda) - -d(y_\lambda, z_\lambda)) \ge 1/\lambda\, d(x, y) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $d(x, z) = d(x, y)$, что противоречит аксиоме единственности продолжения отрезков **G4**. □

Определение 1. Метрическое пространство (X, D) называется касательным конусом к пространству (X, d) в точке p. Точка p при этом называется вершиной касательного конуса. Для касательного конуса к (X, d) в точке p примем обозначение K_pX.

Замечание 1. В случае, когда X является полным римановым многообразием неположительной секционной кривизны, его касательный конус в произвольной точке p в точности совпадает с касательным пространством T_pX.

Геометрические свойства касательного конуса. В этом параграфе мы приводим некоторые следствия из определения касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны в смысле Буземана X. А именно, будет показано, что конус K_pX топологически эквивалентен X и сам является G-пространством неположительной кривизны в смысле Буземана. При этом K_pX допускает действие группы гомотетий с центром p.

Лемма 3. *Тождественное отображение* id: (X, d) → (X, D) *есть гомеоморфизм*.

Доказательство. Непрерывность отображения id следует из неравенства (2). В силу конечной компактности замкнутые шары в (X,d) компактны. Поэтому для любого $r > 0$ ограничение $id|_{B(p,r)}$ является гомеоморфизмом на образ. Отсюда сразу следует, что обратное отображение id^{-1} также непрерывно на X. □

Лемма 4. *Пространство* K_pX *конечно компактно*.

Доказательство. Для произвольной точки $x \in X$ справедливо равенство расстояний $D(p, x) = d(p, x)$. Поэтому всякое ограниченное множество в смысле метрики D ограничено и в смысле метрики d. Кроме того, из леммы 3 следует, что сходимость в смысле метрики D эквивалентна сходимости в смысле метрики d. Следовательно, из конечной компактности пространства (X, d) следует конечная компактность конуса K_pX.

Лемма 5. *Пространство* K_pX *является пространством неположительной кривизны в смысле Буземана.*

Доказательство. Заметим, что K_pX является хаусдорфовым пределом пространств неположительной кривизны в смысле Буземана (X, d_λ). Каждое из пространств (X, d_λ) подобно пространству (X, d) с коэффициентом $1/\lambda$. Отсюда легко следует, что последовательность пространств $(X, d_{1/n})$ является унимодулярно выпуклой в смысле определения, данного в [4, с. 31]. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 4.3 из статьи [4, с. 31], из которой следует утверждение леммы. □

Свойство **G3** в определении G-пространства подразумевает локальную продолжаемость отрезков. Но в случае G-пространств неположительной кривизны в смысле Буземана несложно заметить, что выполнено даже глобальное свойство продолжаемости отрезков, причем каждый отрезок можно продолжить до прямой линии. Поэтому соответствующее свойство пространства K_pX можно сформулировать в следующей лемме.

Лемма 6. *Пространство* K_pX *обладает свойством продолжения отрезков.*

Доказательство. Зафиксируем точки $y, z \in X$ и убывающую бесконечно малую последовательность λ_n. Для каждого n мы построим точку w_n так, что z в метрике d_n будет серединой между y и w_n. Точка w_n существует именно в силу того, что в (X, d) любой отрезок можно продолжать до бесконечности. Все точки w_n содержатся в шаре B(p, r),

где $r = d(p, y) + 2d(y, z)$.

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, получим точку

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n \cdot$$

Изучение предельной процедуры позволяет показать, что точка z будет серединой (в смысле метрики D) между y и w. □

Заметим, что пространство (X, D) допускает действие группы положительных гомотетий h_t с центром p. При $t < 1$ образом произвольной точки x при гомотетии h_t служит точка x_t, а при $t > 1$ – такая точка y, что $x = y_{1/t}$.

Лемма 7. *В пространстве* K_pX *выполнено свойство единственности продолжения отрезков.*

Доказательство. Метрики d и D обладают одним и тем же семейством прямых, проходящих через точку p. Поэтому пространство K_pX обладает свойством единственности продолжения отрезков за точку p. Далее мы покажем, что если некоторый отрезок допускает не единственное продолжение, то это противоречит единственности продолжения отрезков за точку p.

Предположим, что $x_1, x_2, y, z \in X$ – такие различные четыре точки, что

$$D(y, x_1) = D(y, z) + D(z, x_1),$$
$$D(y, x_2) = D(y, z) + D(z, x_2)$$
$$D(z, x_1) = D(z, x_2) = D(z, y) = 1 .$$

Выберем убывающую бесконечно малую последовательность λ_n и при каждом n рассмотрим точки $(x_1)_{\lambda_n}$, $(x_2)_{\lambda_n}$, y_{λ_n} и z_{λ_n}. Во-первых, воспользуемся тем, что $z_{\lambda_n} \to p$ при $n \to \infty$. Рассмотрим также такие точки $\left(\overline{x}_1\right)_n$, $\left(\overline{x}_2\right)_n$ и $\overline{y}_n$, что $(x_i)_{\lambda_n}$ соответственно лежат между z_{λ_n} и $\left(\overline{x}_i\right)_n$, y_{λ_n} лежит между z_{λ_n} и $\overline{y}_n$ и $d(z_{\lambda_n}, (\overline{x}_i)_n) = d(z_{\lambda_n}, \overline{y}_n) = 1$.

Оценка расстояния $D((\overline{x}_1)_n, (\overline{x}_2)_n)$ дает

$$D((\overline{x}_1)_n, (\overline{x}_2)_n) \ge \frac{1}{\lambda_n} D((x_1)_n, (x_2)_n) = D(x_1, x_2) > 0$$

Переходя к пределу подпоследовательности при $n \to \infty$, получим предельные точки $\overline{x}_1 = \lim_{n\to\infty} (\overline{x}_1)_n$, $\overline{x}_2 = \lim_{n\to\infty} (\overline{x}_2)_n$ и $\overline{y} = \lim_{n\to\infty} (\overline{y})_n$. При этом p лежит на отрезках $[\overline{x}_i \overline{y}]$, верно равенство расстояний

$$D(\overline{x}_1, p) = D(\overline{x}_2, p) = D(\overline{y}, p) = 1$$

и неравенство

$$D(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \ge D(x_1, x_2) > 0 \cdot$$

Получается, что отрезок $[\overline{y}p]$ в смысле метрики D допускает не единственное продолжение за точку p. Противоречие. □

Соединяя воедино леммы 3 – 7, получаем в итоге описание геометрии касательного конуса K_pX.

Теорема. *Пусть* X – G-*пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда его касательный конус* K_pX *в произвольной точке* $p\in X$ *также является* G-*пространством неположительной кривизны в смысле Буземана. При этом* K_pX *имеет общее с* X *семейство прямых линий, проходящих через точку* p, *и допускает действие группы положительных гомотетий* h_t *с центром* p.

Заключение. В статье описана конструкция касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны. Тот факт, что касательный конус допускает действие группы положительных гомотетий, имеет важное следствие. Рассматривая повторное построение касательного конуса, можно прийти к выводу, что такой повторный конус имеет структуру слоения, слои которого – прямые линии. Этот факт в итоге приводит к доказательству гипотезы Буземана в рассматриваемом нами случае.

Другое возможное применение описанной конструкции состоит в построении теории дифференцирования на некотором классе сингулярных G-пространств.

Список литературы

1. *Александров А.Д.* Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения // Труды мат. института АН СССР им. В.А. Стеклова. 1951. № 38. С. 5–23.

2. *Берестовский В.Н.* Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову // Алгебра и анализ. 2002. № 14 (5). С. 3–18.

3. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. М., 1962.

4. *Andreev P.D.* Geometric Constructions in the Class of Busemann Nonpositively Curved Spaces // J. Math. Ph. An. Geom. 2009. № 5 (1). P. 25–37.

5. *Berestovskii V.N., Halverson Denise V., Repovš D.* Locally G-homogeneous Busemann G-spaces // Diff. Geom. Appl. 2011. № 29 (3). P. 299–318.

6. *Busemann H.* Metric Methods in Finsler Geometry and in the Foundations of Geometry // Ann. Math. Study. 1942. Vol. 8.

7. *Busemann H.* On Spaces in Which Two Points Determine a Geodesic // Trans Amer Math. Soc. 1943. Vd. 54. P. 171–184.

8. *Krakus B.* Any 3-dimensional G-space is a Manifold // Bull. Acad. Pol. Sci. 1968. № 16. P. 737–740.

9. Thurston P. 4-Dimensional Busemann G-spaces are 4-manifolds // Diff. Geom. Appl. 1996 № 6 (3) P. 245–270.

References

1. Aleksandrov A.D. Odna teorema o treugol'nikakh v metricheskom prostranstve i nekotorye ee prilozheniya [A Theorem on Triangles in a Metric Space and Some of Its Applications]. *Trudy Mat. instituta AN SSSR im. V.A. Steklova* [Collected Papers of Steklov Institute of Mathematics, Academy of Sciences USSR]. 1951, vol. 38, pp. 5–23.

2. Berestovskiy V.N. Prostranstva Buzemana ogranichennoy sverkhu krivizny po Aleksandrovu [Busemann Spaces with Upper Bounded Aleksandrov Curvature]. *Algebra i analiz*, 2002, vol. 14, no. 5, pp. 3–18.

3. Busemann H. *Geometry of Geodesics.* 1955 (Russ. ed.: Buzeman G. *Geometriya geodezicheskikh*. Moscow, 1962. 503 p.).

4. Andreev P.D. Geometric Constructions in the Class of Busemann Nonpositively Curved Spaces. *J. Math. Ph. An. Geom*., 2009, vol. 5, no. 1, pp. 25–37.

5. Berestovskii V.N., Halverson D.M., Repovš D. Locally G-homogeneous Busemann G-spaces. *Diff. Geom. Appl.*, 2011, vol. 29, no. 3, pp. 299–318.

6. Busemann H. Metric Methods in Finsler Geometry and in the Foundations of Geometry. *Ann. Math. Study*, 1942, vol. 8.

7. Busemann H. On Spaces in Which Two Points Determine a Geodesic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943, vol. 54, pp. 171–184.

8. Krakus B. Any 3-dimensional G-space is a Manifold. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 1968, vol. 16, pp. 737–740.

9. Thurston P. 4-dimensional Busemann G-spaces are 4-manifolds. *Diff. Geom. Appl.*, 1996, vol. 6, no. 3, pp. 245–270.

Andreev Pavel Dmitrievich
Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

Starostina Vera Valeryevna
Postgraduate Student, Institute of Mathematics, Information and Space Technologies,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Arkhangelsk, Russia)

GEOMETRY OF THE TANGENT CONE TO BUSEMANN NON-POSITIVELY CURVED G-SPACE

The geometric properties of the tangent cone to Busemann non-positively curved G-space are studied in the paper. The authors consider the construction of the tangent cone as a basic tool for proving Busemann conjecture about the topological structure of G-spaces in the class of non-positively curved spaces.

***Keywords**: G-space, non-positive curvature, tangent cone, Busemann conjecture.*

Контактная информация:
Андреев Павел Дмитриевич
Адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68
e-mail: pdandreev@mail.ru
Старостина Вера Валерьевна
Адрес: 163060, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 68
e-mail: irrefragable@yandex.ru

Рецензент – *Попов В.Н.*, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики института математики, информационных и космических технологий Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова