УДК 597.587.9(268.46):52-17 DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.2.123

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РОСТА ПОЛЯРНОЙ КАМБАЛЫ (Liopsetta glacialis) БЕЛОГО МОРЯ

Г.В. Фукс, Н.А. Шилова***

*Северный филиал Полярного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии им. Н.М. Книповича (г. Архангельск)
**Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (г. Архангельск)

Актуальным вопросом изучения динамики роста рыб в популяциях является анализ линейных и весовых характеристик особей, при этом важен выбор методики его проведения. Математические методы анализа выступают в качестве инструмента решения большого спектра задач, однако для каждой из них необходим индивидуальный метод, позволяющий получить достоверные результаты. В настоящей работе представлен анализ эмпирических данных при помощи методов математического моделирования, с целью выявления закономерностей изменения массы тела полярной камбалы в зависимости от ее длины в различных районах Двинского и Онежского заливов Белого моря. На основе предложенной методики установлено, что скорость роста самцов и самок во всех исследованных районах отличается в значительной мере. Показано, что динамика массы тела полярной камбалы в зависимости от изменения длины тела описывается степенной функцией как для Онежского, так и для Двинского заливов Белого моря. Применение регрессионного анализа позволило сделать вывод о том, что в Онежском заливе можно выделить две обособленные зоны, характеризующиеся различными темпами роста линейных и весовых характеристик как для самцов, так и для самок, обитающих в кутовой и морской частях залива. В Двинском заливе таких обособленных зон не выявлено. Показано, что для исследования зависимости массы тела от длины особей полярной камбалы, обитающих в различных частях Онежского и Двинского заливов, можно использовать универсальные уравнения.

Ключевые слова: *полярная камбала Белого моря, линейный рост полярной камбалы, весовой рост полярной камбалы, корреляционный анализ, регрессионный анализ, параметрические критерии.*

Контактное лицо: Фукс Геннадий Валериевич, *адрес:* 163002, г. Архангельск, ул. Урицкого, д. 17; *e-mail:* fuks@pinro.ru

Для цитирования: Фукс Г.В., Шилова Н.А. Применение методов математического моделирования для изучения роста полярной камбалы (*Liopsetta glacialis*) Белого моря // Arctic Environmental Research. 2017. Т. 17, № 2. С. 123–132. DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.2.123

Вопросы исследования популяционных характеристик рыб не потеряли своей актуальности вплоть до настоящего времени. В то же время развитие научных подходов и технических возможностей привносит значительные коррективы в используемые для анализа методы. С развитием информационных технологий математические методы анализа стали доступнее и позволяют исследователям проводить комплексный анализ эмпирических данных, осуществлять проверку гипотез и получать достоверные результаты. Математические методы анализа основываются, во-первых, на вероятностно-статистическом анализе эмпирических данных, во-вторых – на выдвижении гипотезы и в-третьих – на ее доказательстве [1].

При изучении динамики популяций водных биологических объектов основным инструментом исследователя является анализ характера изменений линейных и весовых параметров особей. Рост рыб – это один из важнейших механизмов адаптации популяции в целом к условиям окружающей среды [2]. При наличии постоянного источника питательных веществ масса тела возрастает экспоненциально. По мере увеличения возраста и размеров [3] темпы прироста снижаются, но рост не прекращается с наступлением половой зрелости [4]. Таким образом, очевидно, что имеется тесная зависимость между массой тела особи и ее линейными характеристиками, а также между линейным ростом и возрастом. Данная гипотеза может быть положена в основу исследований, направленных на оценку состояния морских биоресурсов и составление прогноза.

В настоящее время для прогнозирования динамики реальных биологических систем все чаще прибегают к методам математического моделирования [5]. Условно все математические модели биологических систем можно разделить на регрессионные, качественные и имитационные. В настоящей работе использовались регрессионные модели, для построения которых достаточно статистически значимых корреляций между переменными или параметрами системы. Регрессионные модели позволяют выявить тенденции в развитии популяции и исследовать специфику роста отдельных сообществ в различных средах обитания.

Интенсивное изучение полярной камбалы (*Liopsetta glacialis* (Pallas, 1776)) Белого моря началось с середины XX века. Было доказано, что самки полярной камбалы растут быстрее самцов [6–11]. Такой рост характерен для вида по всему ареалу, в т. ч. в юго-восточной части Баренцева моря [12] и Тауйской губе Охотского моря [13]. В указанных работах в качестве основной гипотезы выдвигалось предположение о зависимости между массой и длиной тела полярной камбалы с учетом ее возраста. В настоящей работе все выводы строились на основе наличия зависимости между массой тела полярной камбалы и ее длиной.

Цель исследования заключается в применении методов математического моделирования, в частности регрессионных моделей, для выявления различий в росте полярной камбалы Белого моря в зависимости от района ее обитания и половой принадлежности.

Материалы и методы. Регрессионные модели строили с использованием пакета анализа «Microsoft Excel» на основе статистических данных, которые обрабатывали согласно утвержденным методикам [14, 15]. В качестве статистической базы использовали систематизированные биологические данные о полярной камбале Белого моря, собранные в ходе регулярных научно-исследовательских рейсов и береговых командировок Полярного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии им. Н.М. Книповича (ПИНРО) в Онежском и Двинском заливах Белого моря (*табл. 1*). Набор данных, характеризующих длину и массу особей, был классифицирован по половому признаку (т. к. рост самок и самцов у большинства видов камбал отличается [16], в т. ч. у полярной камбалы [11, 13]) и местам обитания.

В данной работе рассматривали 6 районов Онежского и 4 – Двинского заливов. При этом акватории о. Кий, р. Колежмы и р. Нюхчи условно относятся к кутовой части Онежского залива, а губа Конюхова, о. Большой Соловецкий и центральная часть залива – к морской.

Таблица 1

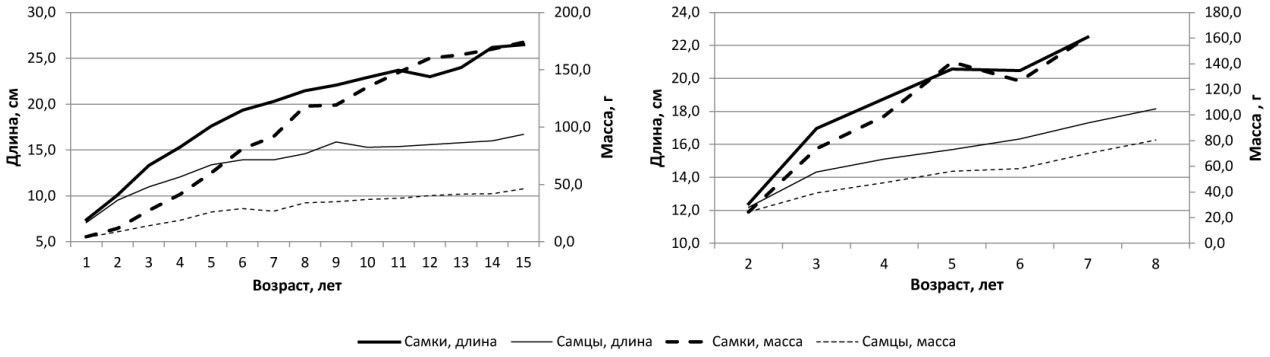
КОЛИЧЕСТВО ИССЛЕДОВАННЫХ КАМБАЛОВЫХ РЫБ БЕЛОГО МОРЯ, экз.

Район	Самки	Самцы
Онежский залив		
р. Колежма	583	447
Центральная часть залива	569	438
о. Кий	1936	713
Губа Конюхова	72	11
р. Нюхча	109	64
о. Большой Соловецкий	255	165
Двинский залив		
Центральная часть залива	145	108
р. Северная Двина	251	35
Унская губа	183	123
Яндова губа	89	15

В Двинском заливе Унская, Яндова губы и р. Северная Двина составляют прибрежную часть залива, а центральная часть залива – морскую.

Результаты и обсуждение. В аналитических исследованиях сотрудников ПИНРО [10] на основе данных многолетнего мониторинга показано, что средние значения скорости роста беломорских камбаловых рыб несколько выше в Двинском заливе по сравнению с Онежским.

Анализ динамики массы тела полярной камбалы в зависимости от ее длины с учетом возрастной характеристики по всем районам Двинского и Онежского заливов показал, что скорость роста самцов и самок в значительной мере отличается (*рис. 1*). Таким образом, специфика изменения массы и длины рыбы является закономерностью, что также подтверждается данными исследований ПИНРО полярной камбалы [12], а также других видов камбаловых [7, 16–20].



а *б*

Рис. 1. Изменение длины и массы особей полярной камбалы с возрастом в морской части заливов Белого моря: *а* – Онежский залив; *б* – Двинский залив

Результаты корреляционного анализа подтвердили основную гипотезу исследования о зависимости между массой и длиной полярной камбалы: по всем районам Двинского и Онежского заливов значения коэффициента корреляции между массой и длиной полярной камбалы выше 0,9.

Для анализа тенденции и формы связи между изучаемыми признаками был проведен регрессионный анализ (*табл. 2*). Общий вид уравнения регрессии, описывающего зависимость массы особей полярной камбалы от их длины, имеет вид $y(x) = ax^b$, где y – масса полярной камбалы (г); x – длина полярной камбалы (см); a, b – параметры модели, вычисленные методом наименьших квадратов. Полученные уравнения регрессии достаточно точно описывают эмпирические данные: близкое к единице значение коэффициента детерминации позволяет сделать вывод о том, что доля неучтенных факторов в модели – менее 16 %.

Проверка значимости регрессионной модели проводилась с помощью критерия Фишера, а для оценки точности уравнений регрессии была рассчитана средняя ошибка аппроксимации (*табл. 3*). Средняя ошибка аппроксимации регрессионных моделей, описывающих зависимость между массой и длиной тела полярной камбалы в Онежском заливе, варьирует в пределах от 6,8 до 12,8 % для самок и от 4,8 до 11,5 % для самцов, что говорит о незначительном отклонении эмпирических данных от теоретических.

Проверка с использованием критерия Фишера показала, что объясненная дисперсия регрессионных моделей существенно больше, чем необъясненная, следовательно, модель является значимой с доверительной вероятностью 95 %.

Аналогичные результаты были получены для регрессионных моделей, описывающих связь между массой и длиной полярной камбалы Двинского залива Белого моря.

Таблица 2

УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МАССОЙ И ДЛИНОЙ ПОЛЯРНОЙ КАМБАЛЫ В РАЙОНАХ ОНЕЖСКОГО И ДВИНСКОГО ЗАЛИВОВ БЕЛОГО МОРЯ

Район	Самки		Самцы	
	Уравнение регрессии	Коэффициент детерминации	Уравнение регрессии	Коэффициент детерминации
Онежский залив				
р. Колежма	$y = 0{,}0080\ x^{3{,}0970}$	$R^2 = 0{,}9557$	$y = 0{,}0111\ x^{2{,}959}$	$R^2 = 0{,}9478$
Центральная часть залива	$y = 0{,}0053\ x^{3{,}3053}$	$R^2 = 0{,}9741$	$y = 0{,}0093\ x^{3{,}0961}$	$R^2 = 0{,}9563$
о. Кий	$y = 0{,}0093\ x^{3{,}0559}$	$R^2 = 0{,}9732$	$y = 0{,}0102\ x^{2{,}9915}$	$R^2 = 0{,}9534$
Губа Конюхова	$y = 0{,}0165\ x^{2{,}1958}$	$R^2 = 0{,}9426$	$y = 0{,}0186\ x^{2{,}8641}$	$R^2 = 0{,}9673$
р. Нюхча	$y = 0{,}0082\ x^{3{,}1075}$	$R^2 = 0{,}9441$	$y = 0{,}0111\ x^{2{,}9696}$	$R^2 = 0{,}9377$
о. Большой Соловецкий	$y = 0{,}0088\ x^{3{,}1529}$	$R^2 = 0{,}9606$	$y = 0{,}0149\ x^{2{,}9432}$	$R^2 = 0{,}9231$
Двинский залив				
Центральная часть залива	$y = 0{,}0048\ x^{3{,}3777}$	$R^2 = 0{,}9786$	$y = 0{,}0097\ x^{3{,}31172}$	$R^2 = 0{,}9411$
р. Северная Двина	$y = 0{,}0126\ x^{3{,}0392}$	$R^2 = 0{,}9617$	$y = 0{,}0165\ x^{2{,}891}$	$R^2 = 0{,}9197$
Унская губа	$y = 0{,}0063\ x^{3{,}1961}$	$R^2 = 0{,}8474$	$y = 0{,}0121\ x^{2{,}9464}$	$R^2 = 0{,}9396$
Яндова губа	$y = 0{,}0161\ x^{2{,}8910}$	$R^2 = 0{,}9352$	$y = 0{,}03\ x^{2{,}6085}$	$R^2 = 0{,}9664$

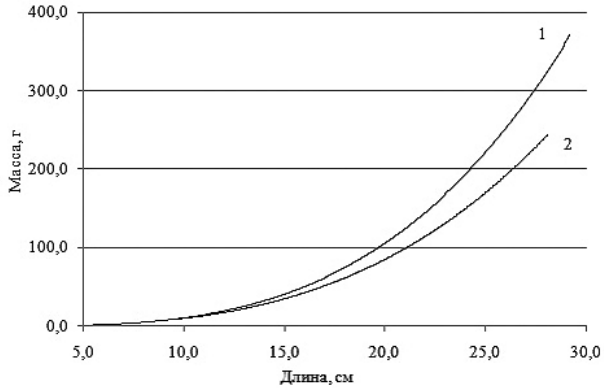
Таблица 3

РАСЧЕТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНЕЙ ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ И ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ФИШЕРА ДЛЯ МАССЫ И ДЛИНЫ ПОЛЯРНОЙ КАМБАЛЫ В ОНЕЖСКОМ ЗАЛИВЕ

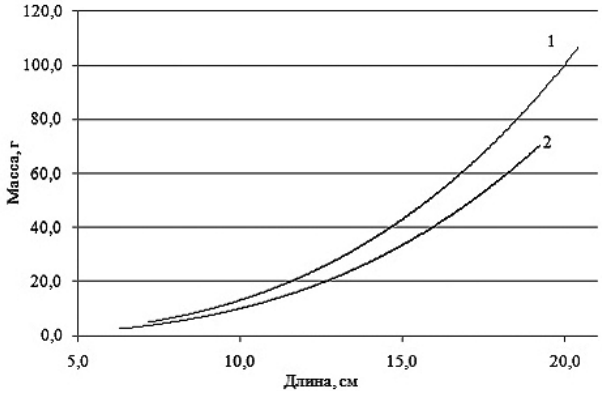
Район	Средняя ошибка аппроксимации (%)		Критерий Фишера					
	Самки	Самцы	Самки			Самцы		
			n	$F_{расч}$	$F_{табл}$	*n*	$F_{расч}$	$F_{табл}$
р. Колежма	9,66	6,42	583	12534,12	3,86	447	8084,47	3,86
Центральная часть залива	10,83	6,30	1336	50203,69	3,85	296	6430,87	3,87
о. Кий	9,58	9,82	1776	64345,69	3,85	609	12406,26	3,86
Губа Конюхова	6,80	4,80	72	1148,86	3,98	11	266,039	5,32
р. Нюхча	12,68	6,14	109	1805,98	3,93	64	933,60	4,00
о. Большой Соловецкий	12,80	11,50	134	3216,16	3,91	48	552,49	4,06

Результаты исследования графической интерпретации аналитической зависимости (*рис. 2, 3*) указывают на то, что места сбора биологической информации в заливах Белого моря могут быть разбиты на районы со схожими темпами роста полярной камбалы. Например, для Онежского залива акватории о. Кий, р. Колежмы и р. Нюхчи могут быть объединены в одну группу, а центральная часть, акватории губы Конюхова и о. Большой Соловецкий – в другую. В Двинском заливе Унская и Яндова губы также объединены в одну группу (данные по самкам). Подобное деление может быть обусловлено гидрологическими и гидрохимическими условиями районов исследования. Кроме этого, на рост особей популяции в значительной мере оказывают влияние состав и численность кормовых объектов, количество пищевых конкурентов и хищников, а также численность собственной популяции и промысел [2].

Данные выводы еще раз подтверждают гипотезу о различии в темпах роста полярной



а



б

Рис. 2. Регрессионные модели, описывающие зависимость массы особей полярной камбалы (*а* – самки, *б* – самцы) от длины их тела в различных районах Онежского залива: 1 – р. Колежма, о. Кий, р. Нюхча; 2 – центральная часть залива, губа Конюхова, о. Большой Соловецкий

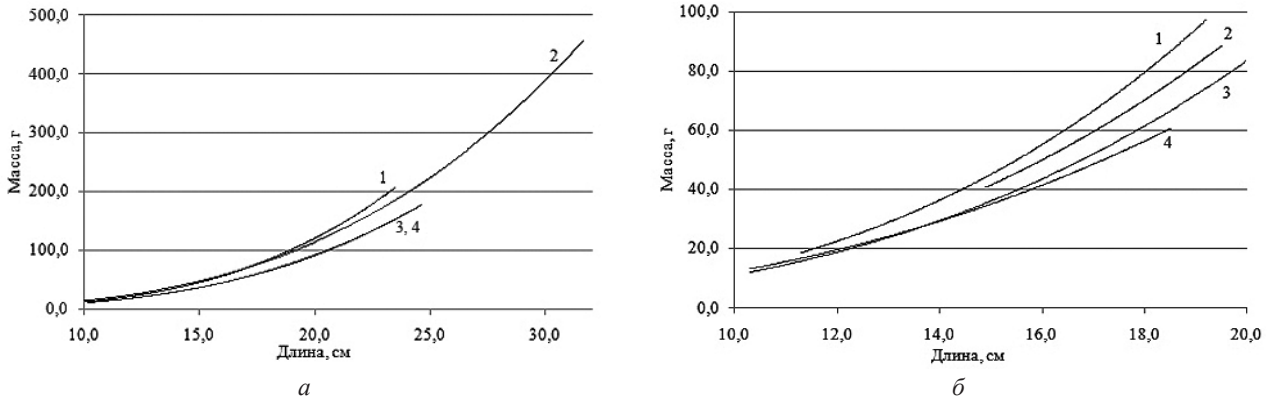


Рис. 3. Регрессионные модели, описывающие зависимость массы особей полярной камбалы (*а* – самки, *б* – самцы) от длины их тела в различных районах Двинского залива: 1 – центральная часть залива; 2 – р. Северная Двина; 3 – Унская губа; 4 – Яндова губа

камбалы в разных районах Онежского и Двинского заливов [10] и доказывают, что зависимость массы тела от длины полярной камбалы характерна как для самок, так и для самцов и выражается степенной функцией.

Проверка гипотезы о возможном делении районов Онежского залива проведена с использованием регрессионного анализа на основе построения доверительных интервалов регрессии (*рис. 4*).

Анализ результатов, полученных для кутовой части Онежского залива, позволяет рассматривать регрессионное уравнение, описывающее связь массы и длины полярной камбалы и построенное по данным района о. Кий, в качестве универсального уравнения для дальнейших исследований. Данный вывод подтверждается двухвыборочным *t*-тестом (с одинаковой дисперсией) с доверительной вероятностью 95 %. Таким образом, для исследования зависимости массы особей полярной камбалы, обитающих в кутовой части Онежского залива, от их длины можно использовать универсальные уравнения:

для самок

$$y = 0{,}0094\, x^{3{,}0479};$$

для самцов

$$y = 0{,}0102\, x^{2{,}9928}.$$

Построенные доверительные интервалы регрессионных уравнений для открытой части Онежского залива позволяют сделать вывод об универсальности уравнений регрессии, описывающих зависимость массы тела особей полярной камбалы, обитающих в центральной части Онежского залива, от их длины:

для самок

$$y = 0{,}0053\, x^{3{,}3073};$$

для самцов

$$y = 0{,}0087\, x^{3{,}1237}.$$

Заключение. Рассмотренный в работе методический подход, основанный на применении методов корреляционно-регрессионного моделирования, может быть использован для проведения сравнительного анализа с целью выявления схожих процессов в развитии популяции в зависимости от района обитания и половой принадлежности вида. Обосновано применение методов корреляционного анализа для установления зависимости между длиной и массой тела полярной камбалы. Показано использование регрессионного анализа для выявления темпа весового роста в развитии популяций.

Итогом применения предложенной методики является выявление связи изменения массы тела полярной камбалы Белого моря и ее дли-

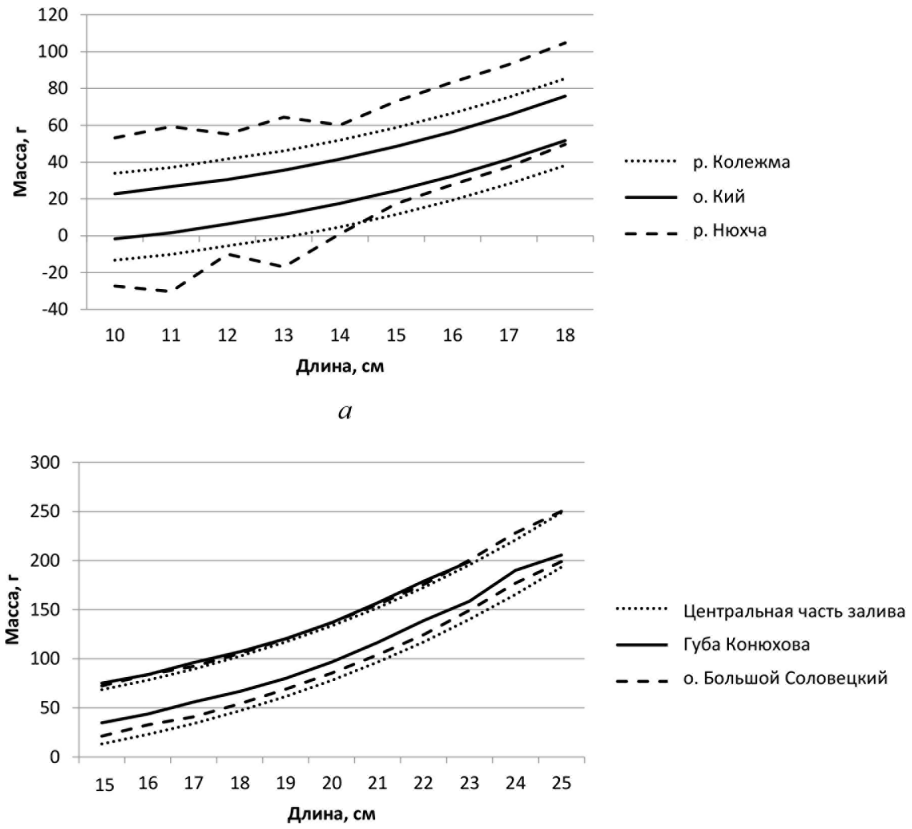


Рис. 4. Доверительные интервалы уравнений регрессии по районам Онежского залива (*а* – кутовая часть, *б* – открытая часть), самки (две кривые по каждому району демонстрируют нижнюю и верхнюю границы доверительных интервалов регрессии)

ны, которая описывается степенной функцией как для Онежского, так и для Двинского заливов. Отмечено наличие характерных для данной популяции различий в темпах роста, что позволяет говорить об изменчивости линейных размеров самок и самцов в зависимости от района залива. Масса особей полярной камбалы, обитающей в морской части заливов, выше, чем в кутовой.

Для Двинского залива Белого моря четкой дифференциации, обусловленной изменчивостью массы тела полярной камбалы в зависимости от района залива, установить не удалось, что может быть объяснено отсутствием достаточного объема статистического материала.

Дальнейшая работа будет направлена на расширение базы данных статистического материала, включающей линейные и весовые характеристики популяции полярной камбалы, обитающей в Белом море, а также в юго-восточной части Баренцева и Карского морей.

Список литературы

1. *Шилова Н.А.* Использование вероятностно-статистических методов для обработки биологических данных морских гидробионтов // Исследования Российской Арктики: прошлое, настоящее, будущее: материалы Всерос. науч. конф., посвящ. Междунар. поляр. году (г. Архангельск, 16–17 декабря 2008 г.). Архангельск, 2008. С. 217–224.

2. *Дгебуадзе Ю.Ю.* Экологические закономерности изменчивости роста рыб. М., 2001. 276 с.

3. Биоэнергетика и рост рыб / под ред. У. Хоара, Д. Рендолла, Дж. Бретта. М., 1983. 407 с.

4. *Правдин И.Ф.* Руководство по изучению рыб (преимущественно пресноводных) / под ред. П.А. Дрягина и В.В. Покровского. М., 1966. 376 с.

5. *Шилова Н.А.* Математическое моделирование и управление процессом роста и развития морских гидробионтов: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2010. 18 с.

6. *Бараненкова А.С.* Полярная камбала *Liopsetta glacialis* // Промысловые рыбы Баренцева и Белого морей. Мурманск, 1952. С. 222–224.

7. *Николаев А.П.* Полярная камбала Онежского залива Белого моря // Вопр. ихтиологии. 1955. № 5. С. 85–94.

8. *Алтухов К.А., Михайловская А.А., Мухомедияров Ф.Б., Надежин В.М., Новиков П.И., Паленичко З.Г.* Рыбы Белого моря. Петрозаводск, 1958. 162 с.

9. *Кузнецов В.В.* Белое море и биологические особенности его флоры и фауны. М.; Л., 1960. 322 с.

10. *Шерстков А.С.* Предварительные результаты работ по беломорским камбаловым в 2002 г. и перспективы исследований // Материалы отчетной сессии Северного отделения ПИНРО. Архангельск, 2003. С. 188–198.

11. *Семушин А.В., Фукс Г.В., Шилова Н.А.* Камбаловые Белого моря: современные данные о биологии полярной камбалы *Liopsetta glacialis*, речной камбалы *Platichthys flesus* и ершоватки *Limanda limanda* // Вопр. ихтиологии. 2015. Т. 55, № 4. С. 413–425.

12. *Кобелев Е.А.* Некоторые биологические особенности полярной камбалы *Liopsetta glacialis* юго-восточной части Баренцева моря // Вопр. ихтиологии. 1989. Т. 29, № 4. С. 550–554.

13. *Юсупов Р.Р., Басов И.Д.* Морфо-биологическая характеристика полярной камбалы *Liopsetta glacialis* (Pleuronectidae, Pleuronectiformes) Тауйской губы (северная часть Охотского моря) // Вестн. Сев.-Вост. науч. центра Дальневост. отд-ния РАН. 2005. № 2. С. 48–55.

14. *Чугунова Н.И.* Руководство по изучению возраста и роста рыб. М., 1959. 164 с.

15. *Мина М.В., Клевезаль Г.А.* Рост животных (анализ на уровне организма). М., 1976. 292 с.

16. *Lozan J.L.* Investigation on the Growth Dab (*Limanda limanda* L.) in Eight Areas of the North Sea and Comparisons with Earlier Findings // Arch. Fish Wise. 1989. Vol. 39, № 2. P. 111–146.

17. *Daniels H.V.* Species Profile Southern Flounder. 2000. URL: https://appliedecology.cals.ncsu.edu/wp-content/uploads/726_flounder.pdf.

18. *Güneş E., Şahin T., Düzgüneş E.* Age, Growth and Reproduction of Flounder (*Platichthys flesus luscus* Pallas, 1811) in the South-Eastern Black Sea // Turkish Journal of Science & Technology. 2011. Vol. 6, № 2. P. 53–59.

19. *Юсупов Р.Р.* Биологическая характеристика хоботной камбалы *Myzopsetta proboscidea* (Pleuronectidae) северной части Охотского моря // Исслед. водн. биол. ресурсов Камчатки и сев.-зап. части Тихого океана. 2013. Вып. 29. С. 116–124.

20. *Дьяков Ю.П.* Размерно-половая и половозрастная структура популяций дальневосточных камбал (Pleuronectidae) // Изв. ТИНРО (Тихоокеан. науч.-исслед. рыбохоз. центра). 2014. Т. 177. С. 77–113.

References

1. Shilova N.A. Ispol’zovanie veroyatnostno-statisticheskikh metodov dlya obrabotki biologicheskikh dannykh morskikh gidrobiontov [The Use of Probability-Statistical Methods for the Biological Data Processing of Marine Hydrobionts]. *Issledovaniya Rossiyskoy Arktiki: proshloe, nastoyashchee, budushchee: materialy Vseros. nauch. konf., posvyashch. Mezhdunar. polyar. godu (g. Arkhangel’sk, 16–17 dekabrya 2008 g.)* [Studies of the Russian Arctic: Past, Present, Future: Proc. All-Russ. Sci. Conf., Dedicated Intern. Polar Year (Arkhangelsk, December 16–17, 2008)]. Arkhangelsk, 2008, pp. 217–224.

2. Dgebuadze Yu.Yu. *Ekologicheskie zakonomernosti izmenchivosti rosta ryb* [Ecological Regularities of Fish Growth Variability]. Moscow, 2001. 276 p.

3. Hoar W.S., Randall D.J., Brett J.R., eds. *Fish Physiology. Vol. 8. Bioenergetics and Growth*. New York, 1979. 786 p.

4. Pravdin I.F. *Rukovodstvo po izucheniyu ryb (preimushchestvenno presnovodnykh)* [A Study Guide of Fish (Mainly Freshwater)]. Ed. by P.A. Dryagin, V.V. Pokrovskiy. Moscow, 1966. 376 p.

5. Shilova N.A. *Matematicheskoe modelirovanie i upravlenie protsessom rosta i razvitiya morskikh gidrobiontov*: avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk [Mathematical Modeling and Management of the Growth and Development Process of Marine Hydrobionts: Cand. Phys. Math. Sci. Diss. Abs.]. Tver, 2010. 18 p.

6. Baranenkova A.S. Polyarnaya kambala *Liopsetta glacialis* [Arctic Flounder *Liopsetta glacialis*]. *Promyslovye ryby Barentseva i Belogo morey* [Commercial Fishes of the Barents and White Seas]. Murmansk, 1952, pp. 222–224.

7. Nikolaev A.P. Polyarnaya kambala Onezhskogo zaliva Belogo morya [Arctic Flounder of the Onega Bay of the White Sea]. *Voprosy ikhtiologii* [Journal of Ichthyology], 1955, no. 5, pp. 85–94.

8. Altukhov K.A., Mikhaylovskaya A.A., Mukhomediyarov F.B., Nadezhin V.M., Novikov P.I., Palenichko Z.G. *Ryby Belogo morya* [Fishes of the White Sea]. Petrozavodsk, 1958. 162 p.

9. Kuznetsov V.V. *Beloe more i biologicheskie osobennosti ego flory i fauny* [The White Sea and Biological Features of Its Flora and Fauna]. Moscow; Leningrad, 1960. 322 p.

10. Sherstkov A.S. Predvaritel'nye rezul'taty rabot po belomorskim kambalovym v 2002 g. i perspektivy issledovaniy [Preliminary Working Results on the White Sea Flatfishes in 2002 and Research Prospects]. *Materialy otchetnoy sessii Severnogo otdeleniya PINRO* [Proc. Report Session of the Northern Branch of the Polar Research Institute of Marine Fisheries and Oceanography]. Arkhangelsk, 2003, pp. 188–198.

11. Semushin A.V., Fuks G.V., Shilova N.A. Kambalovye Belogo morya: sovremennye dannye o biologii polyarnoy kambaly *Liopsetta glacialis*, rechnoy kambaly *Platichthys flesus* i ershovatki *Limanda limanda* [Flatfishes of the White Sea: New Data on the Biology of the Arctic Flounder *Liopsetta glacialis*, European Flounder *Platichthys flesus*, and Common Dab *Limanda limanda*]. *Voprosy ikhtiologii* [Journal of Ichthyology], 2015, vol. 55, no. 4, pp. 413–425.

12. Kobelev E.A. Nekotorye biologicheskie osobennosti polyarnoy kambaly *Liopsetta glacialis* yugo-vostochnoy chasti Barentseva morya [Some Biological Features of Arctic Flounder *Liopsetta Glacialis* in the Southeastern Part of the Barents Sea]. *Voprosy ikhtiologii* [Journal of Ichthyology], 1989, vol. 29, no. 4, pp. 550–554.

13. Yusupov R.R., Basov I.D. Morfo-biologicheskaya kharakteristika polyarnoy kambaly *Liopsetta glacialis* (Pleuronectidae, Pleuronectiformes) Tauyskoy guby (severnaya chast' Okhotskogo morya) [Morphological and Biological Characteristics of Arctic Flounder *Liopsetta glacialis* (Pleuronectidae, Pleuronectiformes) of the Tauysk Bay (Northern Part of the Sea of Okhotsk)]. *Vestnik Severo-Vostochnogo nauchnogo tsentra DVO RAN* [Bulletin of the North-East Scientific Center, Far East Branch of the Russian Academy of Sciences], 2005, no. 2, pp. 48–55.

14. Chugunova N.I. *Rukovodstvo po izucheniyu vozrasta i rosta ryb* [A Study Guide of Fish Age and Growth]. Moscow, 1959. 164 p.

15. Mina M.V., Klevezal' G.A. *Rost zhivotnykh (analiz na urovne organizma)* [Growth of Animals (Organism-Level Analysis)]. Moscow, 1976. 292 p.

16. Lozan J.L. Investigation on the Growth Dab (*Limanda limanda* L.) in Eight Areas of the North Sea and Comparisons with Earlier Findings. *Arch. Fish Wise*., 1989, vol. 39, no. 2, pp. 111–146.

17. Daniels H.V. *Species Profile Southern Flounder. 2000*. Available at: https://appliedecology.cals.ncsu.edu/wp-content/uploads/726_flounder.pdf.

18. Güneş E., Şahin T., Düzgüneş E. Age, Growth and Reproduction of Flounder (*Platichthys flesus luscus* Pallas, 1811) in the South-Eastern Black Sea. *Turkish Journal of Science & Technology*, 2011, vol. 6, no. 2, pp. 53–59.

19. Yusupov R.R. Biologicheskaya kharakteristika khobotnoy kambaly *Myzopsetta proboscidea* (Pleuronectidae) severnoy chasti Okhotskogo morya [Biological Characteristic of Longhead Dab *Myzopsetta proboscidea* (Pleuronectidae) of the Northern Part of the Sea of Okhotsk]. *Issledovaniya vodnykh biologicheskikh resursov Kamchatki i severo-zapadnoy chasti Tikhogo okeana* [Researches of Aquatic Biological Resources of Kamchatka and of the Northwest Part of Pacific Ocean], 2013, no. 29, pp. 116–124.

20. D'yakov Yu.P. Razmerno-polovaya i polovozrastnaya struktura populyatsiy dal'nevostochnykh kambal (Pleuronectidae) [Size-Sex and Sex-Age Structure in Populations of Far-Eastern Flounders (Pleuronectidae)]. *Izvestiya TINRO*, 2014, vol. 177, pp. 77–113.

DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.2.123

Gennadiy V. Fuks*, Natal'ya A. Shilova**

*Northern Branch of the Polar Research Institute of Marine Fisheries and Oceanography named after N.M. Knipovich (Arkhangelsk, Russian Federation)

**Northern (Arctic) Federal University (Arkhangelsk, Russian Federation)

MATHEMATICAL MODELING TECHNIQUES FOR STUDYING THE GROWTH OF THE ARCTIC FLOUNDER (*Liopsetta glacialis*) IN THE WHITE SEA

An actual issue of studying the dynamics of fish growth in populations is the analysis of linear and weight characteristics of individuals; and the choice of the method is important. Mathematical methods of analysis serve as a tool for solving a wide range of problems, but each of them requires an individual method, which allows obtaining reliable results. The paper analyzes the empirical data using mathematical modeling techniques to determine the patterns of body mass changes of the Arctic flounder, depending on its length in various areas of the Dvina and Onega Bays of the White Sea. The proposed methodology elicits the fact that the growth rate of males and females differs largely in all studied areas. The body mass dynamics of the Arctic flounder, depending on the body length variation, is described by a power function for both Onega and Dvina Bays of the White Sea. The regression analysis lead to the conclusion that two separate zones can be distinguished in the Onega Bay, characterized by different growth rates of linear and weight characteristics for both males and females living in the apex and sea part of the bay. Such isolated zones are not identified in the Dvina Bay. The universal equations can be used to study the dependence of body mass on the length of the Arctic flounder species living in different parts of the Onega and Dvina Bays.

Keywords: *Arctic flounder of the White Sea, linear growth of the Arctic flounder, weight growth of the Arctic flounder, correlation analysis, regression analysis, parametric test.*

Поступила 15.02.2017
Received on February 15, 2017

Corresponding author: Gennadiy Fuks, *address:* ul. Uritskogo, 17, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation; *e-mail:* fuks@pinro.ru

For citation: Fuks G.V., Shilova N.A. Mathematical Modeling Techniques for Studying the Growth of the Arctic Flounder (*Liopsetta glacialis*) in the White Sea. *Arctic Environmental Research*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 123–132. DOI: 10.17238/issn2541-8416.2017.17.2.123